

MATEMÁTICA V SECUNDARIA

Ficha 7: Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

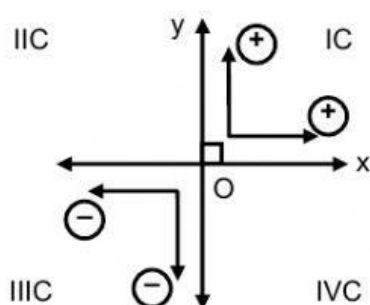
UN POCO DE HISTORIA

Fue Renato Descartes (1 596 – 1 650) quien, al publicar en 1 637 su obra **La Géométrie**, puso los cimientos de la Geometría Analítica. Es por ello que a veces, en memoria de su fundador, la denominan **Geometría Cartesiana** que en resumidos cuentos vendría a ser el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un álgebra.

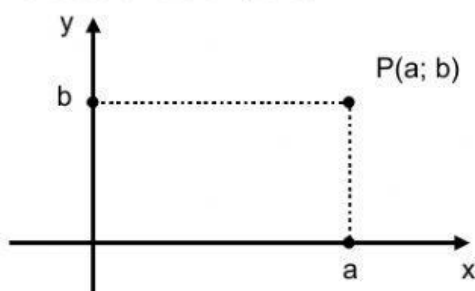
La **Trigonometría**, se desarrolló en conexión con el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Este tema está dedicado a aquellas partes de la trigonometría que se relacionan con la geometría del plano cartesiano. No obstante, cometeríamos un **grave error** limitando el estudio de la trigonometría a su aplicación a triángulos. Sus aplicaciones son más extensas en muchos campos teóricos y prácticos como por ejemplo, en las ondas; vibraciones; corrientes alternas; los sonidos; etc.

NOCIONES PREVIAS

SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES



Ubicación de un punto



Donde:

- x : Eje de Abscisas
- y : Eje de Ordenadas
- IC : Primer Cuadrante
- IIC : Segundo Cuadrante
- IIIC : Tercer Cuadrante
- IVC : Cuarto Cuadrante
- O : Origen del Sistema

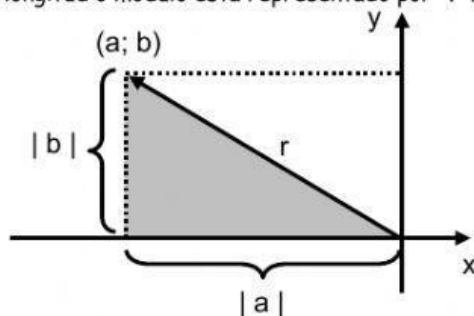
Donde:

- P : Punto del Sistema Bidimensional
- a : Abscisa del Punto P
- b : Ordenada del Punto P
- (a; b): Coordenadas del Punto P



Radio vector

Es el segmento de recta dirigido (**flecha**) que parte del origen hacia un punto cualquier del sistema; su longitud o módulo está representado por "r".



Donde: r: Longitud del Radio Vector

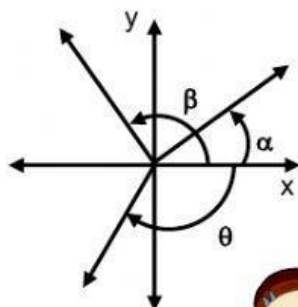
$$r^2 = a^2 + b^2$$

¡Importante!
¡Recordar!

... $|a|^2 = a^2$

Ángulo en posición normal

Es aquel Ángulo Trigonómico cuyo vértice coincide con el origen del sistema bidimensional y su lado inicial descansa en el semieje positivo de las abscisas, mientras que su lado final puede encontrarse en cualquiera de los cuadrantes o coincidir con algún semieje en cuyo caso es llamado ángulo cuadrantal.



Donde:

$\alpha, \beta \wedge \theta$ son las medidas de los ángulos en posición normal mostrados.

L.I.: Lado Inicial

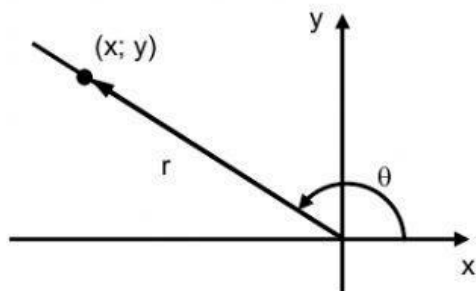
L.F.: Lado Final

¡Recordar!



También son llamados «s en posición canónica o estándar.

Del siguiente gráfico definiremos las Razones Trigonómicas para un ángulo en posición normal los cuales son **independientes** del sentido de giro o el número de vueltas que pudiera realizar.



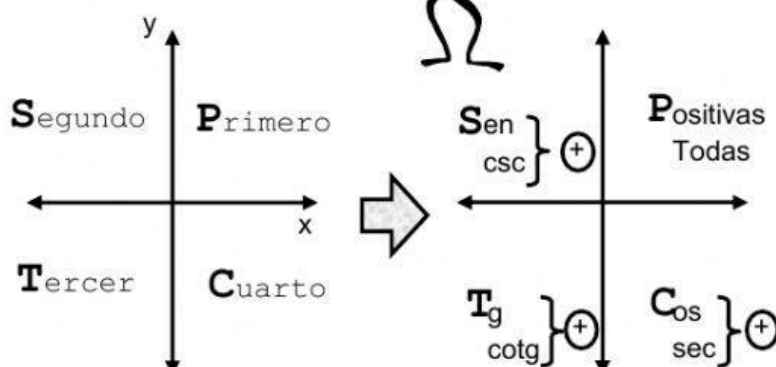
$\text{sen}\theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{M.R.V.}} = \frac{y}{r}$	$\text{csc}\theta = \frac{\text{M.T.V.}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y}$
$\text{cos}\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{M.R.V.}} = \frac{x}{r}$	$\text{sec}\theta = \frac{\text{M.R.V.}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x}$
$\text{tg}\theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x}$	$\text{cot}\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y}$

REGLA DE SIGNOS

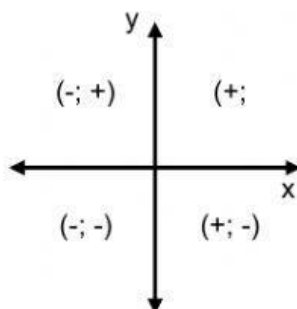
C R.T.	IC	IIC	IIIC	IVC
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

comprobación

Para recordar



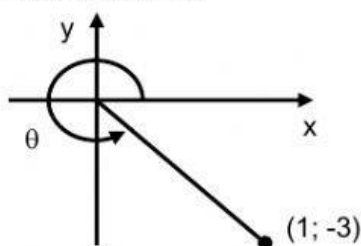
Utilizamos el siguiente gráfico para un ángulo en posición normal de medida "θ".



Ejemplo 1

Del siguiente gráfico calcula:

$$E = \sqrt{10} \text{sen}\theta - 12 \text{cot}\theta$$



Ejemplo 2

Indicar el signo resultante de la siguiente operación:

$$E = \text{sen}130^\circ \cdot \text{cos}230^\circ \cdot \text{tg}330^\circ$$

Solución 1

a) Con el par ordenado del dato calculamos "r":

$$r^2 = 1^2 + (-3)^2 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

b) Reemplazamos las definiciones:

$$E = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) - 12\left(\frac{1}{-3}\right)$$

$$E = -3 + 4 \Rightarrow E = 1$$

Solución 2

$$E = \text{sen}130^\circ \cdot \text{cos}230^\circ \cdot \text{tg}330^\circ$$

$$E = (+) \cdot (-) \cdot (-) \Rightarrow E = (+)$$

Ejemplo 3

Indicar el cuadrante al que pertenece la medida angular " θ " si:

$$\operatorname{tg} \theta < 0 \quad \wedge \quad \operatorname{csc} \theta > 0$$

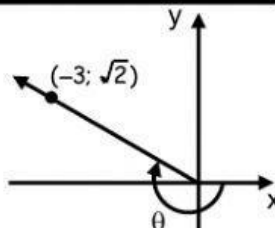
Solución 3

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \theta = \ominus \quad \{ \text{IIC} \wedge \text{IVC} \} \\ \operatorname{csc} \theta = \oplus \quad \{ \text{IC} \wedge \text{IIG} \} \end{array} \right\} \theta \in \text{IIC}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

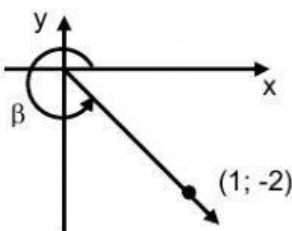
1. Del gráfico calcula: $E = \sqrt{11} \cos \theta - 6\sqrt{2} \operatorname{tg} \theta$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5



2. Del gráfico calcula: $E = \sqrt{5} \sec \beta + 4 \cot \beta$

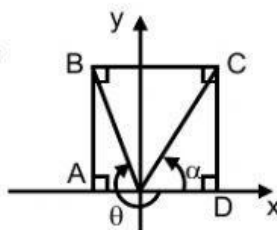
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5



3. Del gráfico calcula: $E = \cot \alpha - \cot \theta$

Si: ABCD es un cuadrado

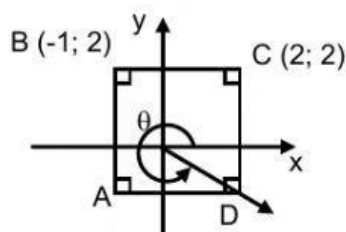
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5



4. Del gráfico calcula " $\operatorname{tg} \theta$ "

Si: ABCD es un cuadrado

- a) -0,1
- b) -0,2
- c) -0,3
- d) -0,4
- e) -0,5





5. Por el punto $P(-2; \sqrt{5})$ pasa el lado final de un ángulo en posición normal cuya medida es " θ ". Calcula: " $\sec \theta$ "
a) $-1/2$ b) $-2/3$ c) $-3/4$
d) $-4/3$ e) $-3/2$
6. Por el punto $Q(-\sqrt{2}; -\sqrt{7})$ pasa el lado final de un ángulo en posición canónica cuya medida es " α ". Calcula: " $\sqrt{7} \csc \alpha$ ".
a) 1 b) 2 c) 3
d) -3 e) -2
7. Si: $\sec \alpha = -\frac{2}{3} \wedge \alpha \in \text{IIIC}$ Calcula: $E = \sqrt{5}(\tan \alpha + \sec \alpha)$
a) -1 b) -2 c) -3
d) 2 e) 3
8. Si: $\cot \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \theta \in \text{IVC}$ Calcula: $E = \sqrt{21} \sec \theta + \sqrt{7} \sin \theta$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
9. Indica el signo de cada expresión:
I. $\sin 100^\circ \cos 200^\circ$
II. $\tan 190^\circ \cot 320^\circ$
III. $\sec 200^\circ \csc 350^\circ$
a) +, +, + b) -, -, - c) +, +, -
d) -, -, + e) +, -, -
10. Indica el signo de cada expresión:
I. $\sin 200^\circ \tan 200^\circ$
II. $\cos 100^\circ \cot 100^\circ$
III. $\sin 100^\circ \cos 300^\circ$
a) +, +, + b) -, -, - c) -, +, +
d) +, -, - e) +, -, +
a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) IC $\wedge$ IIC
11. A que cuadrante pertenece ϕ si:
 $\sin \phi < 0 \wedge \sec \phi < 0$
a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) IIC $\wedge$ IIIC



12. Del gráfico calcula: $E = 3\sec^2\theta - \operatorname{tg}\theta$

- a) 20
- b) 21
- c) 22
- d) 23
- e) 24

