

MISIÓN 4_PRODUCTO ESCALAR

CÁLCULO DEL PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

El producto escalar de dos vectores, que no debe confundirse con el producto de *un vector por un escalar*, es una nueva operación entre dos vectores libres cuyo **resultado es un número**.

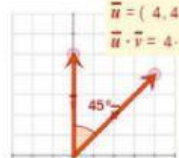
Existen dos formas de calcular el producto escalar de dos vectores:

a) A partir de las componentes de los dos vectores.

Dados $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, su producto escalar es:

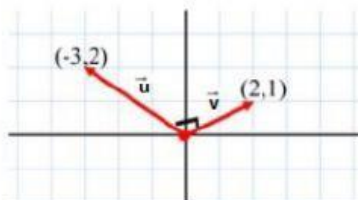
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Vamos a ver dos ejemplos, uno partiendo de las coordenadas de ambos vectores y otro en el que tenemos los dos vectores gráficamente.

Partiendo de las coordenadas del vector.	Partiendo de su representación gráfica.
$\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$	Determino las coordenadas viendo la representación gráfica y después procedo igual que en el caso anterior.  $\vec{u} = (4, 4)$ $\vec{v} = (0, 5)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20$

ACTIVIDAD: Calcula el producto escalar.

Recuerda que el resultado del producto escalar es un número. Este número es el que tienes que introducir como resultado.



$$\vec{u} = (1, -3) \text{ y } \vec{v} = (4, 2)$$

$$\vec{u} = (3, 5) \text{ y } \vec{v} = (-2, 0)$$

MISIÓN 4_PRODUCTO ESCALAR

b) Conociendo los módulos de los vectores y el ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Vamos a verlo con un ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y sabiendo el ángulo que forman podemos calcular su producto

escalar como: $\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$ $\text{ángulo}(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$

Actividad: Calcula el producto escalar:

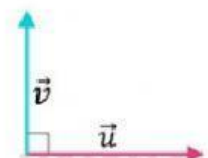
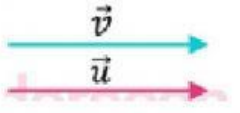
- a) Dados los siguientes vectores y sabiendo que forman un ángulo entre ellos de $87,7^\circ$, calcular su producto escalar:

$$\vec{u} = (3, -4)$$

$$\vec{v} = (6, 8)$$

- b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 150° y su módulos son $|\vec{u}| = \sqrt{108}$ y $|\vec{v}| = 12$. Calcula su producto escalar.

Reflexiona sobre el producto escalar de 2 vectores:

¿Cuánto vale el coseno de 90° ?	¿Cuánto vale el coseno de 180° ?
Por lo tanto, si los vectores son perpendiculares, su producto escalar será 0  Vectores perpendiculares $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \cos 90^\circ = 0$	Por lo tanto, si los vectores son paralelos, el producto escalar será la multiplicación de los módulos.  Vectores paralelos y misma dirección $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \cos 0^\circ = \vec{u} \vec{v} $

Actividad: Calcula el producto escalar:

Dados los siguientes vectores calcula el producto escalar si:

$$\vec{u} = (3, -4)$$

$$\vec{v} = (6, 8)$$

- Son perpendiculares
- Forman un ángulo de 180°
- Son paralelos.

MISIÓN 4_PRODUCTO ESCALAR

CÁLCULO DEL ÁNGULO QUE FORMAN DOS VECTORES

Hasta ahora sabemos que el producto escalar de dos vectores se calcula como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si quisiéramos **saber el ángulo** que forman dos vectores, simplemente tendríamos que **despejar** de la ecuación anterior **el coseno** y nos quedaría:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Una vez conocido el coseno, podemos calcular el **arcocoseno** para averiguar el ángulo.

Veámoslo con un ejemplo:

Dados los vectores, calcular el ángulo que forman: $\vec{u} = (3, 3)$ $\vec{v} = (0, 5)$

- Sabemos que su producto escalar vale: 15
- Sabemos que sus módulos valen: $\sqrt{18}$ y $\sqrt{25}$
- Por lo tanto podemos saber cuánto vale el coseno:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{15}{\sqrt{18} \cdot 5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Calculando el arcocoseno podemos saber el ángulo que forman

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

Actividad: calcula el ángulo que forman los siguientes vectores.

- a) Calcula el ángulo que forman los siguientes vectores.

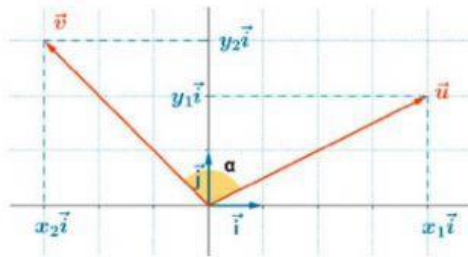
$$\vec{u} = (-2, 1) \text{ y } \vec{v} = (3, -3) \qquad \vec{u} = (4, -1) \text{ y } \vec{v} = (-2, 5)$$

- b) Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (m, 5)$ y $\vec{v} = (10, -6)$ sean perpendiculares.

- c) Halla el valor de x de forma que el producto escalar de los siguientes vectores sea igual a 2.
- $$\vec{u} = (2, 0) \quad \vec{v} = (x, -1)$$

MISIÓN 4_PRODUCTO ESCALAR

d) Dado los vectores de la figura



- Determina $u \cdot v$

- Determina el ángulo que forman.

e) Calcula el valor de x para que el ángulo que forman los siguientes vectores sea 90° .

$$\vec{u} = (2, x) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (1, 3)$$