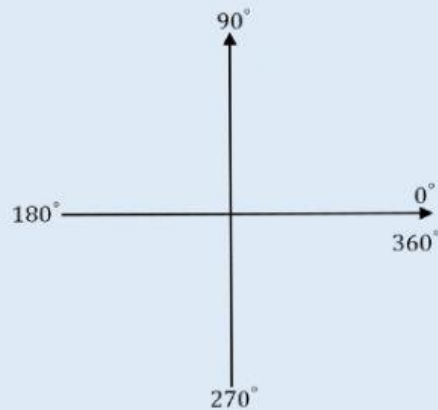


6. Relasi Sudut Batas Kuadran

Problems Corner



Dengan memperhatikan koordinat kartesius tersebut. Kamu diminta untuk menentukan perbandingan trigonometri diseluruh batas kuadran yang terdapat pada koordinat kartesius tersebut. Berapakah nilai perbandingan trigonometri tersebut ?

Ayo Selesaikan.

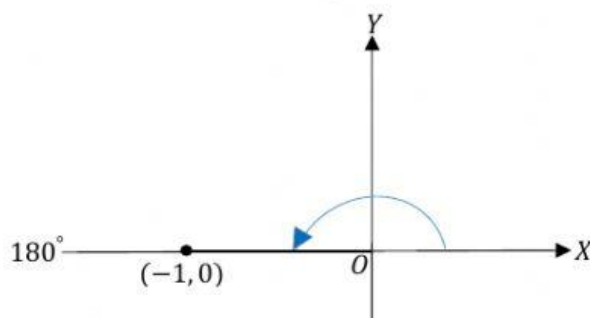
Sebelum menyelesaikan permasalahan yang diberikan, kita harus mengidentifikasi terlebih dahulu sudut mana saja yang menjadi sudut-sudut batas kuadran

Sudut-Sudut Batas Kuadran : 0° , 90° , 180° , 270° , 360°

Pada pembahasan sebelumnya, kita sudah mengetahui nilai perbandingan trigonometri dari 0° dan 90° melalui perbandingan trigonometri sudut istimewa. Selanjutnya dengan cara yang hampir sama kita juga dapat menentukan perbandingan trigonometri 180° , 270° dan 360°

Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 180°

Perhatikan bahwa dalam sistem kuadran sudut 180° berada pada sumbu X negatif (kuadran II). Perhatikan sistem koordinat Kartesius berikut ini. Dengan memperhatikan bahwa $\cos 180^\circ = -1$, $x = -1$, dan $y = 0$, maka



Gambar 21. Sistem Koordinat Kartesius

Sehingga dapat disimpulkan bahwa perbandingan trigonometri untuk sudut 180° adalah sebagai berikut.

Perbandingan Trigonometri 180°

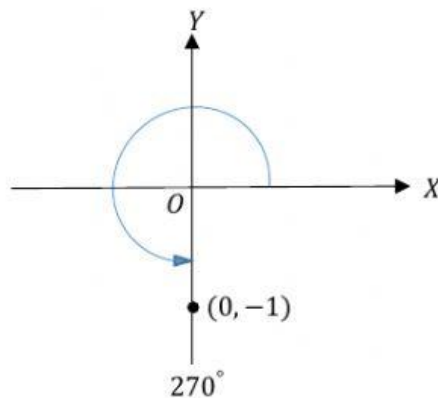
$$\sin 180^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\tan 180^\circ = -\frac{0}{1} = 0$$

Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 270°

Perhatikan bahwa dalam sistem kuadran sudut 270° berada pada sumbu Y negatif (kuadran III). Perhatikan sistem koordinat Cartesius berikut ini. Dengan memperhatikan bahwa $x = 0$, dan $y = -1$, maka



Gambar 22. Sistem Koordinat Cartesius

Sehingga dapat disimpulkan bahwa perbandingan trigonometri untuk sudut 270° adalah sebagai berikut.

Perbandingan Trigonometri 270°

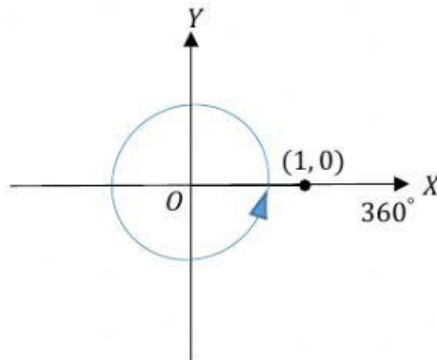
$$\sin 270^\circ = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 270^\circ = -\frac{1}{0} = \text{tidak terdefinisi}$$

Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 360°

Perhatikan bahwa dalam sistem kuadran sudut 360° berada pada sumbu X negatif (kuadran I atau IV). Perhatikan sistem koordinat Cartesius berikut ini. Dengan memperhatikan bahwa $r = 1$, $x = 1$, dan $y = 0$, maka



Gambar 23. Koordinat Cartesius

Sehingga dapat disimpulkan bahwa perbandingan trigonometri untuk sudut 360° adalah sebagai berikut.

Perbandingan Trigonometri 360°	
$\sin 360^\circ = \frac{0}{1} = 0$	
$\cos 360^\circ = \frac{1}{1} = 1$	
$\tan 360^\circ = \frac{0}{1} = 0$	

Setelah menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut batas kuadran, maka dapat disimpulkan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut batas kuadran sebagai berikut.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	Tak terdefinisi	0	Tak terdefinisi	0

CONTOH SOAL

1. Terdapat rasio perbandingan trigonometri untuk $0 < \theta < \pi$ yaitu $\cos \theta = -\frac{3}{5}$. Berapakah nilai $\tan \theta$ dari rasio perbandingan trigonometri tersebut ?

Jawab**Langkah 1**

Dari masalah yang diberikan, diketahui bahwa nilai $\cos \theta$ dari rasio perbandingan trigonometri tersebut bernilai negatif. Sehingga kita tidak mengetahui letak dari sudut θ ini terletak di kuadran berapa.

Langkah 2

Dari soal diketahui bahwa nilai $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ dengan batas sudut $0 < \theta < \pi$

Langkah 3

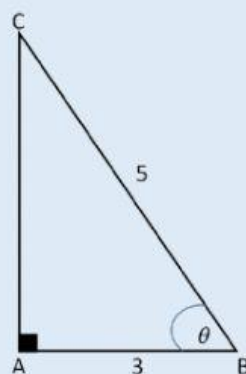
Dari batasan sudut yang diketahui yaitu $0 < \theta < \pi$ masih dalam bentuk radian, sehingga kita perlu mengubah batasan sudut tersebut kedalam bentuk derajat untuk selanjutnya kita ketahui, batasan sudut tersebut dalam satuan derajat.

Setelah kita mengetahui batasan sudut tersebut dalam satuan derajat, maka kita dapat menentukan letak sudut θ berada kuadran I, II, III, atau IV. Namun jika lihat dari nilai $\cos \theta$ yang diketahui dari soal dapat kita cermati bahwa nilai $\cos \theta$ dari rasio trigonometri akan bernilai negatif pada kuadran II dan III, sehingga kemungkinannya adalah letak sudut θ berada pada kuadran II atau kuadran III

Langkah 4

Diketahui batasan suatu sudut θ adalah $0 < \theta < \pi = 0 < \theta < 180^\circ$ sehingga sudut θ berada pada kuadran II.

Selanjutnya untuk lebih mempermudah kita dalam menentukan nilai rasio trigonometri yang diminta, dapat dilakukan dengan mengsketsa sebuah segitiga siku-siku sebagai berikut.



CONTOH SOAL

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

Kita dapat menentukan sisi depan dari θ dengan menggunakan teorema Pythagoras sebagai berikut.

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$AC = \sqrt{25 - 9}$$

$$AC = \sqrt{16}$$

$$AC = 4$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$$

Langkah 5

Perlu kita ingat bahwa, permasalahan yang diberikan adalah batas sudut θ adalah $0 < \theta < \pi = 0 < \theta < 180^\circ$ yang terletak pada kuadran II, yang kita ketahui bahwa pada kuadran tersebut, hanya nilai $\sin \theta$ dan $\sec \theta$ yang bernilai negatif. Sehingga tanda aljabar pada $\tan \theta = \frac{4}{3}$ akan berubah menjadi $\tan \theta = -\frac{4}{3}$

2. Jika nilai suatu rasio trigonometri $\tan \alpha = \frac{12}{5}$ dan $\cos \alpha < 0$. Maka berapakah nilai $\sin \alpha$ dari rasio trigonometri tersebut ?

Jawab**Langkah 1**

Pada soal diketahui nilai rasio trigonometri $\tan \alpha$ bernilai positif tetapi diketahui juga nilai rasio trigonometri $\cos \alpha$ yang bernilai negatif. Ini artinya nilai rasio tersebut tidak terletak di kuadran pertama.

Ingat: seluruh nilai rasio trigonometri di kuadran pertama bernilai positif

Kita harus dapat menentukan terlebih dahulu nilai rasio trigonometri ini terletak di kuadran berapa agar dapat menentukan tanda aljabar nilai rasio trigonometri $\sin \alpha$ yang diminta pada soal.

Langkah 2

Diketahui $\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{12}{5}$ dan $\cos \alpha < 0$ = nilai $\cos$ bernilai negatif, kita harus menentukan hipotenusa agar dapat menentukan nilai $\sin \alpha$ yang diminta pada soal

CONTOH SOAL

Langkah 3

Kita harus menentukan letak dari sudut α terletak dikuadran II, III, atau IV, mengingat nilai $\cos \alpha$ yang disajikan pada soal bernilai negatif.

Petunjuk lain yang dapat kita gunakan untuk menyelesaikan masalah ini adalah nilai dari $\tan \alpha$ yang bernilai positif. Sehingga kita dapat menentukan letak kuadran dari sudut α dari nilai $\cos \alpha$ yang bernilai negatif dan $\tan \alpha$ yang bernilai positif.

Selanjutnya, untuk menentukan nilai $\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}}$, pada soal belum diketahui nilai dari hipotunesa, maka kita dapat menggunakan segitiga siku-siku yang sisi-sisinya telah diketahui melalui nilai $\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{12}{5}$

Langkah 4

Pada materi yang telah kita pelajari, kita ketahui bahwa pada

Kuadran I : seluruh nilai rasio trigonometri bernilai positif

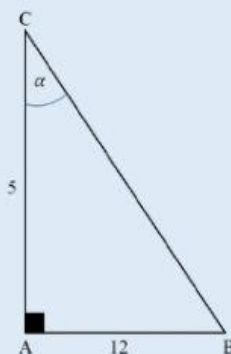
Kuadran II : $\sin \alpha = (+)$, $\cos \alpha = (-)$, $\tan \alpha = (-)$

Kuadran III : $\sin \alpha = (-)$, $\cos \alpha = (-)$, $\tan \alpha = (+)$

Kuadran IV : $\sin \alpha = (-)$, $\cos \alpha = (+)$, $\tan \alpha = (-)$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa sudut α pada soal ini terletak pada kuadran ke III.

Selanjutnya untuk menentukan nilai $\sin \alpha$ kita dapat mensketsa sebuah segitiga siku-siku terlebih dahulu untuk membantu kita dalam menentukan hipotunesa dari segitiga tersebut. Berdasarkan nilai rasio trigonometri $\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{12}{5}$ maka didapat sketsa segitiga siku-siku sebagai berikut.



Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, maka didapat hipotunesa = BC sebagai berikut.

CONTOH SOAL

$$BC = \sqrt{CA^2 + AB^2}$$

$$BC = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$BC = \sqrt{25 + 144}$$

$$BC = \sqrt{169}$$

$$BC = 13$$

Sehingga kita dapat menentukan

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotenus}} = \frac{12}{13}$$

Langkah 5

Perlu kita ingat kembali bahwa sudut α pada soal ini terletak pada kuadran ke III

Sehingga nilai $\sin \alpha$ pada soal ini bernilai negatif. Maka,

$$\sin \alpha = -\frac{12}{13}$$

3. Jika nilai rasio trigonometri $\cos 25^\circ = n$, maka nilai rasio trigonometri untuk $\frac{\sin 115^\circ - \cos 155^\circ}{\sin 115^\circ \times \cos 155^\circ}$ adalah ?

Jawab**Langkah 1**

Pada soal tersebut, sudut-sudut yang ditanyakan adalah $\sin 115^\circ$ dan $\cos 155^\circ$, namun yang diketahui pada soal adalah nilai $\cos 25^\circ$. Kita harus dapat menemukan hubungan nilai $\cos 25^\circ$ dengan $\sin 115^\circ$ dan $\cos 155^\circ$ untuk menyelesaikan soal ini.

Langkah 2

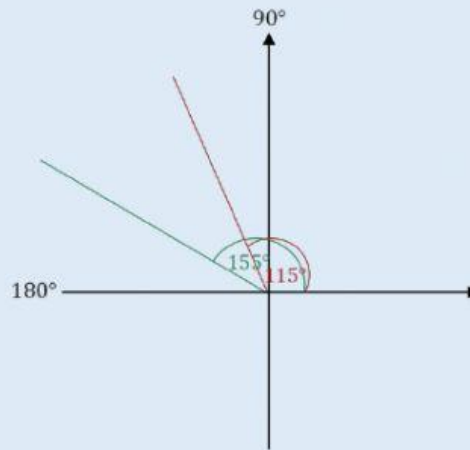
Diketahui bahwa $\cos 25^\circ = n$, sedangkan nilai $\sin 115^\circ$ dan $\cos 155^\circ$ tidak diketahui.

Langkah 3

Kita telah mempelajari bahwa terdapat sudut-sudut lain selain sudut istimewa yang tidak kita ketahui nilainya. Sehingga kita perlu menggunakan konsep sudut berelasi untuk menyelesaikannya.

CONTOH SOAL

Hal pertama yang dapat kita lakukan adalah menganalisis letak kuadran dari sudut 115° dan sudut 155° agar dapat kita tentukan relasi sudut yang akan digunakan.



Dapat kita perhatikan bahwa sudut 115° dan sudut 155° terletak di kuadran II pada koordinat kartesius.

Pada kuadran ke II dalam koordinat kartesius kita ketahui bahwa terdapat dua relasi sudut yang dapat kita gunakan, yaitu

Relasi sudut θ dengan $(90^\circ + \theta)$ dan Relasi sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$

Untuk $\sin 115^\circ \Rightarrow \sin(90^\circ + 25^\circ)$

Untuk $\cos 155^\circ \Rightarrow \cos(180^\circ - 25^\circ)$

Langkah 4

Jika diketahui $\cos 25^\circ = n$, maka

$$\sin 115^\circ = \sin(90^\circ + 25^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin(90^\circ + 25^\circ) = \cos 25^\circ = n$$

$$\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ = -n$$

CONTOH SOAL

Maka,

$$\begin{aligned}\frac{\sin 115^\circ - \cos 155^\circ}{\sin 115^\circ \times \cos 155^\circ} &= \frac{n - (-n)}{n \times (-n)} \\ &= \frac{2n}{-(n)^2} \\ &= -\frac{2}{n}\end{aligned}$$

Langkah 5

Relasi sudut θ dengan $(90^\circ + \theta)$ dipilih untuk menyelesaikan nilai $\sin 115^\circ$ dikarenakan adanya hubungan $\sin 115^\circ = \sin(90^\circ + 25^\circ)$ dengan petunjuk yang diketahui pada soal yaitu $\cos 25^\circ$. Sebab jika kita mencari nilai $\sin 115^\circ$ menggunakan relasi sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$ hasil yang didapat adalah $\sin(180^\circ - 65^\circ)$ dimana tidak terdapat petunjuk apapun mengenai rasio trigonometri sudut 65° pada soal. Alasan yang sama berlaku untuk nilai $\cos(155^\circ)$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa

$$\frac{\sin 115^\circ - \cos 155^\circ}{\sin 115^\circ \times \cos 155^\circ} = -\frac{2}{n}$$

REFLEKSI**Kuadran dan Sudut Berelasi Trigonometri**

Dari materi dan contoh mengenai kuadran yang telah kita pelajari dan kita kerjakan sebelumnya, dapat kita simpulkan bahwa kuadran dapat kita gunakan untuk menentukan tanda aljabar rasio trigonometri yang sudutnya lebih besar dari 90° . Sedangkan sudut berelasi trigonometri kita gunakan untuk menentukan nilai rasio trigonometri di berbagai kuadran dalam koordinat kartesius, selain itu kita memutuskan sudut berelasi trigonometri untuk menentukan rasio trigonometri yang bukan merupakan sudut istimewa.