UNIT PEMBELAJARAN 2

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi pada unit ini Anda diharapkan dapat

1. Menentukan rasio trigonometri untuk sudut-sudut berelasi
2. Menentukan solusi dari masalah yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi

B. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUDUT BERELASI

Problems Corner

Pada saat melaksanakan project trigonometri dengan menggunakan klinometer, Aisyah berhasil menentukan sudut yang akan ia cari perbandingan trigonometrinya yaitu sudut 135°. Namun pada konsep perbandingan trigonometri dasar, Aisyah tidak dapat langsung menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut 135° dikarenakan sudut 135° bukan merupakan salah satu sudut istimewa dalam trigonometri yang langsung dapat diketahui nilainya. Lalu bagaimana solusi dari permasalahan ini?

Ayo Selesaikan

Pada penyelesaian masalah tersebut diketahui bahwa sudut yang akan dicari nilai perbandingan trigonometrinya adalah 135°, dengan menggunakan perbandingan trigonometri sudut berelasi maka terdapat beberapa alternatif penyelesaian yang dapat digunakan sebagai berikut.

Diketahui bahwa $A = 135^\circ$ terletak di Kuadra II pada bidang Cartesius. Sudut $A = 135^\circ$ berelasi dengan $(\theta = 45^\circ)$ karena $A = (90^\circ + 45^\circ)$ atau $A = (180^\circ - 45^\circ)$

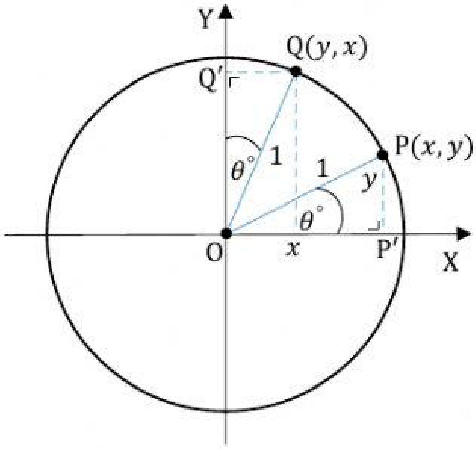
Pada subbab sebelumnya, kita sudah mempelajari dasar perbandingan trigonometri, kemudian menentukan nilai perbandingan trigonometri, dan menentukan tanda aljabar perbandingan trigonometri untuk masing-masing kuadran pada bidang Cartesius. Lalu permasalahan selanjutnya adalah bagaimana menentukan perbandingan trigonometri diluar sudut-sudut istimewa yang sebelumnya telah kita pelajari ? Untuk menentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri selain sudut-sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya, maka digunakanlah perbandingan trigonometri sudut berelasi.

Petunjuk

Untuk mempermudah kamu dalam menentukan nilai sudut-sudut berelasi, dapat digunakan dengan beberapa cara yang telah dipelajari di SMP/MTs yaitu materi satuan lingkaran, kesebangunan, sifat pencerminan (refleksi) ataupun perputaran (rotasi)

1. Relasi Sudut θ dan $(90^\circ \pm \theta)$

Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ - \theta)$



Gambar 13. Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ - \theta)$

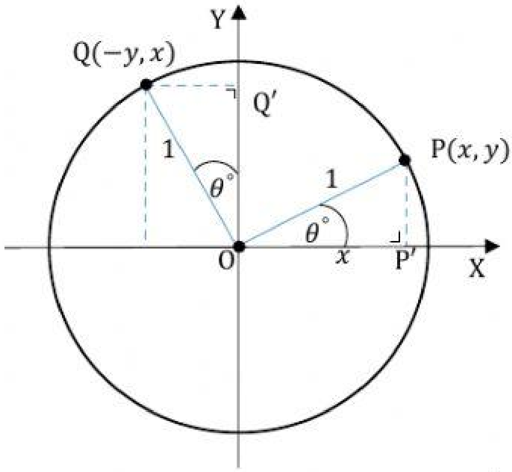
Perhatikan Gambar 13 , bila nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle QOX = (90^\circ - \theta^\circ)$ dibandingkan dengan nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle POX = \theta^\circ$ akan diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta^\circ$		Untuk $Q(y, x)$ dan $\angle QOX = (90^\circ - \theta)$	
$\cos\theta^\circ = \frac{x}{1}$	$\sin\theta^\circ = \frac{y}{1}$	$\sin(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{x}{1}$	$\cos(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{1}$
$\cot\theta^\circ = \frac{x}{y}$	$\tan\theta^\circ = \frac{y}{x}$	$\tan(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{x}{y}$	$\cot(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{x}$
$\text{cosec}\,\theta^\circ = \frac{1}{y}$	$\sec\theta^\circ = \frac{1}{x}$	$\sec(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{y}$	$\text{cosec}(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{x}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(90^\circ - \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ - \theta)$
$\sin (90^\circ - \theta) = \cos\theta$
$\cos (90^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\tan (90^\circ - \theta) = \cot\mathrm{an}\,\theta$
$\mathrm{cosec}\,(90^\circ - \theta) = \sec\theta$
$\sec (90^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$
$\mathrm{cotan}(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ + \theta)$



Gambar 14. Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ + \theta)$

Perhatikan Gambar. 14 berikut ini. Misalkan $\angle POX = \theta$ dan $\angle QOX = (90^\circ + \theta)$ maka $\angle QOY = \theta$. Dengan menggunakan analisa kesebangunan pada segitiga OPP' dan segitiga OQQ' dapat ditunjukkan bahwa koordinat titik Q adalah $(-y\,, x)$. Dengan demikian, hubungan antara nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle QOX = (90^\circ + \theta)$ dengan nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle POX = \theta$ adalah sebagai berikut.

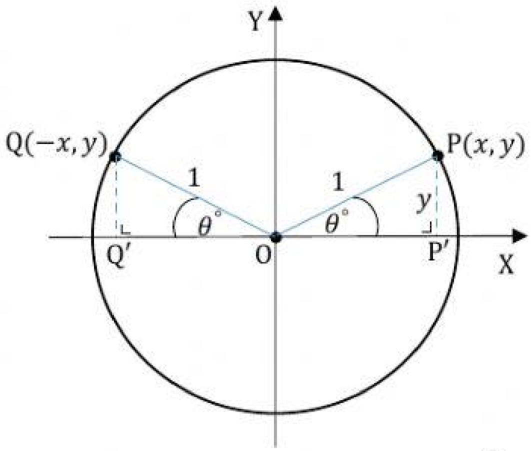
Untuk $P(x,y)$ dan $\angle POX = \theta$		Untuk $Q(-y,x)$ dan $\angle QOX = (90^\circ + \theta)$	
$\cos\theta^\circ = \frac{x}{1}$	$-\sin\theta^\circ = -\frac{y}{1}$	$\sin(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{x}{1}$	$\cos(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{-y}{1}$
$-\cot\theta^\circ = -\frac{x}{y}$	$-\tan\theta^\circ = -\frac{y}{x}$	$\tan(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{x}{-y}$	$\cot(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{-y}{x}$
$-\mathrm{cosec}\,\theta^\circ = -\frac{1}{y}$	$\sec\theta^\circ = \frac{1}{x}$	$\sec(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{1}{-y}$	$\mathrm{cosec}(90^\circ + \theta^\circ) = \frac{1}{x}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(90^\circ - \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(90^\circ + \theta)$
$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$ $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$ $\tan(90^\circ + \theta) = -\text{cotan}\,\theta$ $\text{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$ $\sec(90^\circ + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$ $\text{cotan}(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$

2. Relasi Sudut θ dan $(180^\circ \pm \theta)$

Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$



Gambar 15. Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$

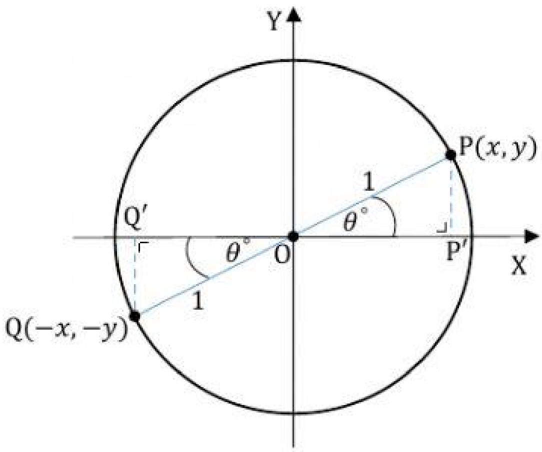
Pada gambar 15 , misalkan $\angle POX = \theta$ dan $\angle QOX = (180^\circ - \theta)$ maka $\angle QOQ' = \theta$. Dengan menggunakan analisa kesebangunan pada segitiga OPP' dan segitiga OQQ' dapat ditunjukkan bahwa koordinat titik Q adalah $(-x\,, y)$. Dengan demikian, hubungan antara nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle QOX = (180^\circ - \theta)$ dengan nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle POX = \theta$ adalah sebagai berikut.

Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta$	Untuk $Q(-x, y)$ dan $\angle QOX = (180^\circ - \theta)$
$\sin\theta^\circ = \frac{y}{1}$ $\quad -\cos\theta^\circ = -\frac{x}{1}$	$\sin(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{1}$ $\quad \cos(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{-x}{1}$
$-\tan\theta^\circ = -\frac{x}{y}$ $\quad -\cot\theta^\circ = -\frac{y}{x}$	$\tan(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{-x}{y}$ $\quad \cot(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{-x}$
$-\sec\theta^\circ = -\frac{1}{x}$ $\quad \text{cosec}\,\theta^\circ = \frac{1}{y}$	$\sec(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{-x}$ $\quad \text{cosec}(180^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{y}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ - \theta)$
$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$
$\text{cosec}(180^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\text{cotan}(180^\circ - \theta) = -\text{cotan}\,\theta$

Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ + \theta)$



Gambar 16. Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ + \theta)$

Pada gambar 16 , misalkan $\angle POX = \theta$ dan $\angle QOX = (180^\circ + \theta)$ maka $\angle QOQ' = \theta$. Dengan menggunakan analisa kesebangunan pada segitiga OPP' dan segitiga OQQ' dapat ditunjukkan bahwa koordinat titik Q adalah $(-x, -y)$. Dengan demikian, hubungan antara nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle QOX = (180^\circ + \theta)$ dengan nilai perbandingan trigonometri untuk $\angle POX = \theta$ adalah sebagai berikut.

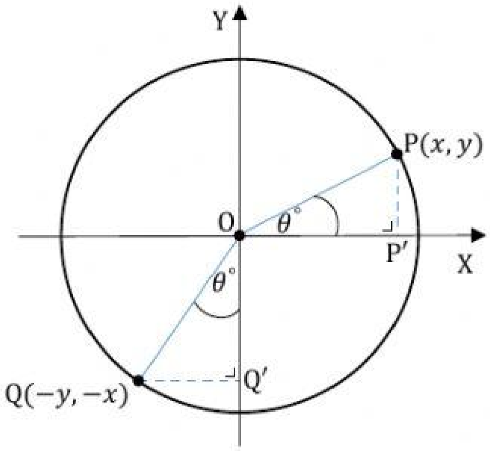
Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta$		Untuk $Q(-x, -y)$ dan $\angle QOX = (180^\circ + \theta)$	
$-\sin\theta^\circ = -\frac{y}{1}$	$-\cos\theta^\circ = -\frac{x}{1}$	$\sin(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{-y}{1}$	$\cos(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{-x}{1}$
$\tan\theta^\circ = \frac{y}{x}$	$\cot\theta^\circ = \frac{x}{y}$	$\tan(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{-y}{-x}$	$\cot(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{-x}{-y}$
$-\sec\theta^\circ = -\frac{1}{x}$	$-\text{cosec}\,\theta^\circ = -\frac{1}{y}$	$\sec(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{1}{-x}$	$\text{cosec}(180^\circ + \theta^\circ) = \frac{1}{-y}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(180^\circ + \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(180^\circ + \theta)$
$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$
$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$
$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$
$\text{cosec}(180^\circ + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\text{cotan}(180^\circ + \theta) = \text{cotan}\,\theta$

3. **Relasi Sudut θ dan $(270^\circ \pm \theta)$**

Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ - \theta)$



Gambar 17. Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ - \theta)$

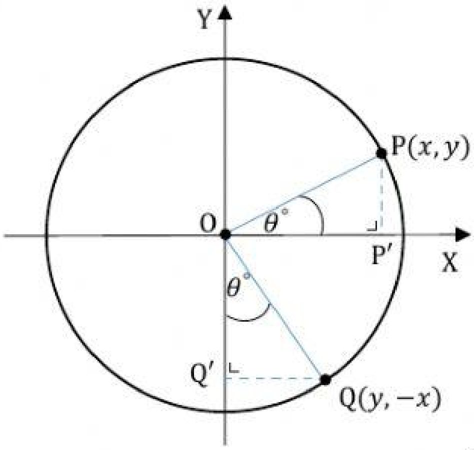
Dengan menggunakan acuan pada gambar 17 dan cara yang sama ketika kita menentukan relasi sudut sebelumnya, maka relasi sudut untuk sudut $(270^\circ - \theta)$ adalah sebagai berikut.

Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta$	Untuk $Q(-y, -x)$ dan $\angle QOX = (270^\circ - \theta)$
$-\cos\theta^\circ = -\frac{x}{1}$ $\quad -\sin\theta^\circ = -\frac{y}{1}$	$\sin(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{-x}{1}$ $\quad \cos(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{-y}{1}$
$\cot\theta^\circ = \frac{x}{y}$ $\quad \tan\theta^\circ = \frac{y}{x}$	$\tan(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{x}{y}$ $\quad \cot(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{-y}{-x}$
$-\text{cosec}\,\theta^\circ = -\frac{1}{y}$ $\quad -\sec\theta^\circ = -\frac{1}{x}$	$\sec(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{-y}$ $\quad \text{cosec}(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{-x}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(270^\circ - \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ - \theta)$
$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$
$\tan(270^\circ - \theta) = \text{cotan}\,\theta$
$\text{cosec}\,(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\sec(270^\circ - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{cotan}(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ + \theta)$



Gambar 18. Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ + \theta)$

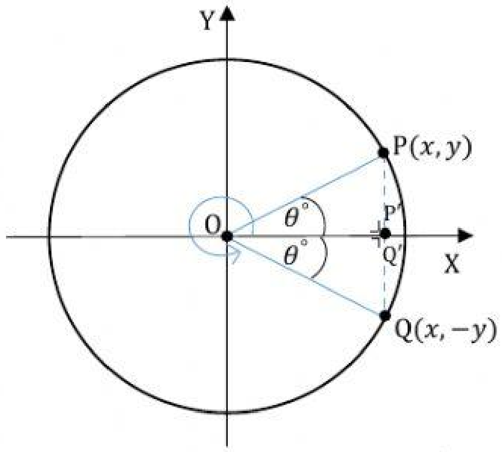
Dengan menggunakan acuan pada gambar 18 dan cara yang sama ketika kita menentukan relasi sudut sebelumnya, maka relasi sudut untuk sudut $(270^\circ + \theta)$ adalah sebagai berikut.

Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta$		Untuk $Q(y, -x)$ dan $\angle QOX = (270^\circ + \theta)$	
$-\cos\theta^\circ = -\frac{x}{1}$	$\sin\theta^\circ = \frac{y}{1}$	$\sin(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{-x}{1}$	$\cos(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{1}$
$-\cot\theta^\circ = -\frac{x}{y}$	$-\tan\theta^\circ = -\frac{y}{x}$	$\tan(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{-x}{y}$	$\cot(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{y}{-x}$
$\text{cosec}\,\theta^\circ = \frac{1}{y}$	$-\sec\theta^\circ = -\frac{1}{x}$	$\sec(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{y}$	$\text{cosec}(270^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{-x}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(270^\circ + \theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(270^\circ + \theta)$
$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$
$\tan(270^\circ + \theta) = -\text{cotan}\,\theta$
$\text{cosec}\,(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\sec(270^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{cotan}(270^\circ - \theta) = -\tan\theta$

4. Relasi Sudut θ dan $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ atau $(-\theta)$



Gambar 19. Relasi Sudut θ dengan $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ atau $(-\theta)$

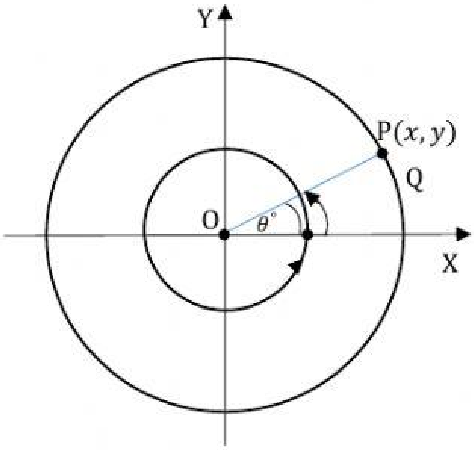
Pada gambar 19, misalkan $\angle POX = \theta^\circ$. Sudut QOX = $(n \cdot 360^\circ - \theta)$, dengan n bilangan bulat, mengakibatkan titik Q berada pada kaki sudut yang nilainya sama dengan $(-\theta)$. Dengan demikian, rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ sam dengan rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(-\theta)$. Tadi sudah kita misalkan bahwa $\angle POX = \theta^\circ$, dengan menggunakan analisis kesebangunan pada segitiga OPP' dan segitiga OQQ' dapat ditunjukkan bahwa koordinat titik Q adalah $(x, -y)$. Dengan demikian, perbandingan trigonometri untuk $\angle QOX = (n \cdot 360^\circ - \theta) = (-\theta)$ adalah sebagai berikut.

Untuk $P(x, y)$ dan $\angle POX = \theta$	Untuk $Q(x, -y)$ dan $\angle QOX = (n \cdot 360^\circ - \theta)$
$-\sin\theta^\circ = -\frac{y}{1}$ $\quad \cos\theta^\circ = \frac{x}{1}$	$\sin(-\theta^\circ) = \frac{-y}{1}$ $\quad \cos(-\theta^\circ) = \frac{x}{1}$
$-\tan\theta^\circ = -\frac{y}{x}$ $\quad -\cot\theta^\circ = -\frac{x}{y}$	$\tan(-\theta^\circ) = \frac{-y}{x}$ $\quad \cot(-\theta^\circ) = \frac{x}{-y}$
$\text{cosec}\,\theta^\circ = \frac{1}{y}$ $\quad -\sec\theta^\circ = -\frac{1}{x}$	$\sec(-\theta^\circ) = \frac{1}{x}$ $\quad \text{cosec}(-\theta^\circ) = \frac{1}{-y}$

Sehingga dapat disimpulkan relasi sudut θ dengan $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ atau $(-\theta)$ sebagai berikut.

Relasi Sudut θ dengan $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ atau $(-\theta)$
$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
$\sec(n \cdot 360^\circ - \theta) = \sec(-\theta) = \sec\theta$
$\operatorname{cotan}(n \cdot 360^\circ - \theta) = \operatorname{cotan}(-\theta) = -\operatorname{cotan}\theta$

5. Relasi Sudut θ dan $(n \cdot 360^\circ + \theta)$



Gambar 20. Relasi Sudut θ dengan $(n \cdot 360^\circ + \theta)$

Perhatikan gambar 20. misalkan $\angle POX = \theta^\circ$. Sudut QOX = $(n \cdot 360^\circ + \theta)$, dengan n bilangan bulat, mengakibatkan titik Q berimpit dengan titik P. Dengan demikian, rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ sama dengan perbandingan trigonometri untuk sudut θ

Relasi Sudut θ dengan $(n \cdot 360^\circ + \theta)$
$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$
$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$
$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$
$\operatorname{cosec}(360^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$
$\operatorname{cotan}(360^\circ + \theta) = \operatorname{cotan}\theta$

BERIKAN TANDA CENTANG JIKA TELAH MENYELESAIKAN MATERI INI