UNIT PEMBELAJARAN 1

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi pada unit ini Anda diharapkan dapat

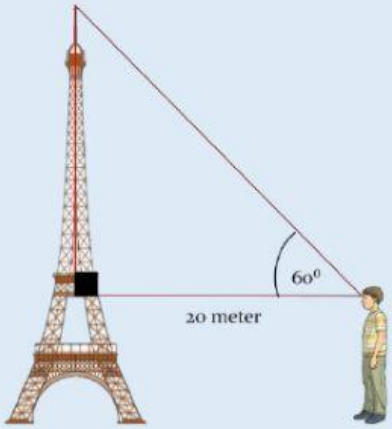
1. Menentukan perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa
2. Menentukan solusi dari masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut istimewa

C. NILAI PERBANDINGAN TRIGONOMETRI UNTUK SUDUT-SUDUT ISTIMEWA

Problems Corner

Perhatikan permasalahan berikut ini. Seorang anak berdiri 20 meter dari sebuah menara. Sudut yang dibentuk antara mata anak tersebut dengan ujung puncak menara yang berada pada bagian paling atas menara adalah 60^0 . Berapakah tinggi mercusuar jika dihitung dari titik mata anak tersebut ?

Untuk memudahkan kita dalam mengerjakan permasalahan ini, maka kita akan menggambarkan deskripsi permasalahan tersebut kedalam sebuah gambar.



Jika pada sub materi sebelumnya kita dapat menentukan salah satu sisi sebuah segitiga siku-siku jika kedua sisinya diketahui dengan menggunakan teorema phytagoras, pada permasalahan ini hanya terdapat satu sisi yang diketahui sehingga kita tidak dapat menggunakan teorema phytagoras dalam menyelesaikan masalah ini. Namun demikian, untuk dapat menyelesaikan masalah ini kita dapat menggunakan rasio trigonometri pada sudut istimewa. Pelajarilah materi berikut ini untuk dapat mengetahui rasio trigonometri pada sudut istimewa.

LIVEWORKSHEETS

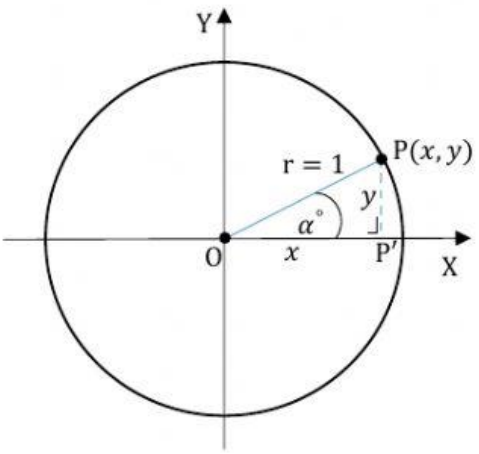
Dalam perbandingan trigonometri, terdapat sudut-sudut yang disebut sudut-sudut istimewa. Sudut istimewa adalah suatu sudut di mana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara langsung tanpa menggunakan daftar trigonometri atau kalkulator. Adapun sudut-sudut istimewa tersebut adalah sebagai berikut.

SUDUT-SUDUT ISTIMEWA PERBANDINGAN TRIGONOMETRI				
$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$

1) Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 0° dan 90°

Nilai perbandingan trigonometri untuk kedua sudut ini dapat ditentukan dengan menggunakan konsep lingkaran satuan.

Lingkaran satuan



Gambar 5. Lingkaran

Perhatikan gambar disamping. Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, diperoleh.

$\sin \alpha^\circ = \frac{y}{1} = y$

$\cos \alpha^\circ = \frac{x}{1} = x$

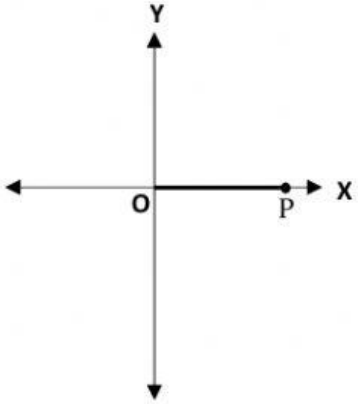
$\tan \alpha^\circ = \frac{y}{x}$, dengan catatan $x \neq 0$

Dengan demikian, dalam lingkaran satuan itu, koordinat titik $P\ (x, y)$ dapat dinyatakan sebagai P $(\cos \alpha^\circ\ ,\ \sin \alpha^\circ\ )$

LIVEWORKSHEETS

Nilai Perbandingan Trigonomteri Sudut 0°

Gambar 6 merupakan gambar sudut dari 0° . Sudut 0° berada pada sumbu X positif. Dari gambar 6. dapat diketahui bahwa r = 1 , x = 1 , dan y = 0 . Jika koordinat titik P adalah (1, 0). Maka dari koordinat titik $P\,(x, y)$ yang sebelumnya kita temukan pada satuan lingkaran dapat disimpulkan bahwa



Gambar 6. Sudut 0°

$$P\,(x, y) = \mathrm{P}\,(\cos\alpha^\circ,\ \sin\alpha^\circ) \Leftrightarrow P\,(1\,, 0) = (\cos\alpha^\circ,\ \sin\alpha^\circ)$$

Sehingga perbandingan trigonometri untuk sudut 0° adalah sebagai berikut

$\sin 0^\circ = 0$

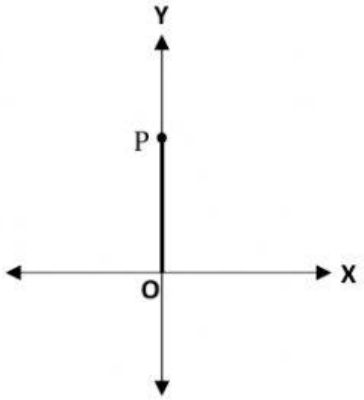
$\cos 0^\circ = 1$

$\tan 0^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0$

Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut 90°

Gambar 7. merupakan gambar sudut dari 90° . Sudut 90° berada pada sumbu Y positif. Dari gambar 7. dapat diketahui bahwa r = 1 , x = 0 , dan y = 1. Jika koordinat titik P adalah (0, 1). Maka dari koordinat titik $P\,(x, y)$ yang sebelumnya kita temukan pada satuan lingkaran dapat disimpulkan bahwa

LIVEWORKSHEETS



Gambar 7. Sudut 90°

$$P\,(x, y) = \mathrm{P}\,(\cos\alpha^\circ,\ \sin\alpha^\circ) \Leftrightarrow P\,(0\,,1) = (\cos\alpha^\circ,\ \sin\alpha^\circ)$$

Sehingga perbandingan trigonometri untuk sudut 90° adalah sebagai berikut

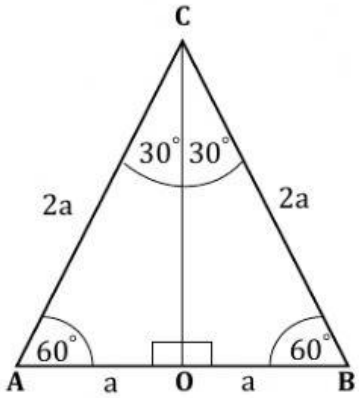
$\sin 90^\circ = 1$

$\cos 90^\circ = 0$

$\tan 90^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \dfrac{1}{0} =$ tidak terdefinisi

2) Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30° dan 60°

Dalam menentukan perbandingan trigonometri untuk sudut 30° dan 60°, akan digunakan segitiga siku-siku sama sisi dengan besar masing-masing sudutnya adalah 60° seperti pada gambar 8. berikut ini.



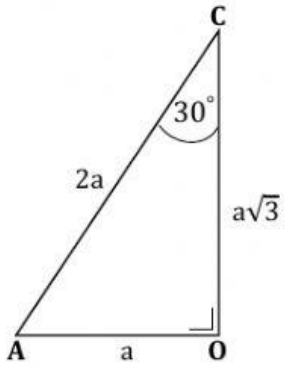
Gambar 8. Segitiga Sama Sisi

Selanjutnya, akan ditentukan tinggi dari segitiga pada gambar 7. menggunakan Dalil Phytagoras.

$$\mathrm{CO} = \sqrt{\mathrm{CA}^2 - \mathrm{AO}^2}$$
$$\mathrm{CO} = \sqrt{(2a)^2 - (a)^2}$$
$$\mathrm{CO} = \sqrt{3a^2}$$
$$\mathrm{CO} = a\sqrt{3}$$

LIVEWORKSHEETS

Nilai Perbandingan trigonometri sudut 30°



Gambar 9. Segitiga Siku-Siku AOC

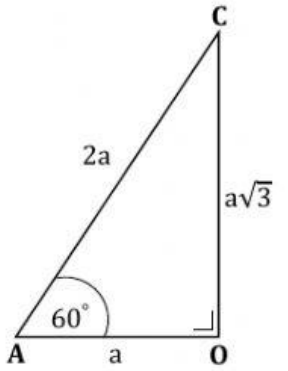
Perhatikan segitiga AOC dengan sudut C sebesar 30°. Unsur-unsur yang didapat adalah sisi depan sudut C adalah AO = a , sisi samping sudut C adalah CO = $a\sqrt{3}$, dan hipotunesa sudut C adalah AC = 2a.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} = \frac{AO}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{hipotunesa}} = \frac{CO}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{AO}{CO} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Nilai Perbandingan trigonometri sudut 60°



Gambar 10. Segitiga Siku-Siku ABC

Perhatikan segitiga AOC dengan sudut A sebesar 60°. Unsur-unsur yang didapat adalah sisi depan sudut A adalah CO = $a\sqrt{3}$, sisi samping sudut A adalah AO = a , dan hipotunesa sudut A adalah AC = 2a.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} = \frac{CO}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

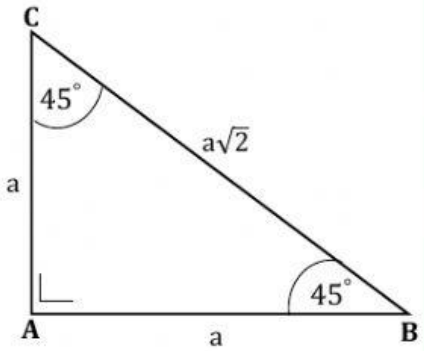
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{hipotunesa}} = \frac{AO}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{CO}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

3) Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45°

Dimisalkan sebuah segitiga siku-siku sama kaki ABC dengan besar sudut C = sudut B = 45° dan masing-masing sisi siku-sikunya AC = AB = a. Sehingga didapat hipotenusa segitiga tersebut BC = $a\sqrt{2}$. Akan diambil salah satu sudut yang besarnya sama yaitu sudut C = 45°.

LIVEWORKSHEETS



Gambar 11. Segitiga Siku-Siku

Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45°

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{hipotunesa}} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

CONTOH SOAL

1. Tunjukkan bahwa $\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \tan 30^\circ$.

Jawab

Langkah 1
Pada soal ini masalah yang diminta adalah menentukan kesetaraan dari nilai rasio trigonometri

Langkah 2
Namun pada soal tidak diberitahu berapa nilai rasio trigonometri dari $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ$

Langkah 3
Dikarenakan nilai $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ$ tidak diberi tahu pada soal, maka kita harus mengetahui terlebih dahulu berapa nilai rasio trigonometri $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ$. Pada materi sebelumnya, kita telah mengetahui bahwa 60° dan 30° merupakan sudut-sudut istimewa yang nilai rasio trigonometrinya dapat kita tentukan tanpa menggunakan kalkulator, sehingga nilai dari $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ$ dapat kita ketahui menggunakan konsep tersebut.

Selanjutnya, untuk dapat menunjukkan bahwa $\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \tan 30^\circ$ kita dapat mengubah bentuk persamaan pada ruas kiri sehingga setara dengan $\tan 30^\circ$ atau kita dapat menyetarakan nilai pada kedua ruas. Pada langkah pengerjaan ini akan ditunjukkan bahwa persamaan pada ruas kiri setara dengan $\tan 30^\circ$

LIVEWORKSHEETS

CONTOH SOAL

Langkah 4

Dari materi yang telah kita pelajari, dapat kita ketahui bahwa nilai rasio trigonometri untuk $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Maka,

$$\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}\right) = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}\right) = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \tan 30^\circ = \tan 30^\circ$$

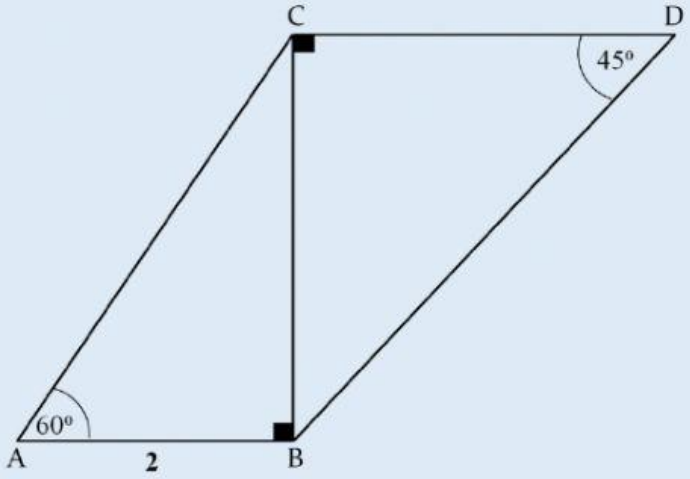
Langkah 5

Dari penyelesaian yang telah kita kerjakan pada langkah 4, kita dapat menunjukkan bahwa $\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \tan 30^\circ$ karena hasil $\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dan $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Sehingga langkah penyelesaian yang telah kita lakukan sudah benar dan kita dapat menunjukkan bahwa $\left(\frac{1-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = \tan 30^\circ$

2. Seorang kontraktor akan membangun pagar pembatas pada sebuah lahan yang dideskripsikan seperti gambar berikut ini.

LIVEWORKSHEETS

CONTOH SOAL



Berapakah panjang pagar pembatas yang dibutuhkan untuk membuat pagar pembatas pada bagian BD ?

Jawab

Langkah 1

Panjang sisi yang diminta pada soal adalah sisi BD. Namun jika diperhatikan segitiga siku-siku BCD, tidak ada satupun panjang sisi yang diketahui. Sehingga kita tidak dapat menggunakan secara langsung Teorema Phytagoras ataupun Rasio Trigonometri untuk menentukan nilai BD.

Langkah 2

Pada soal diketahui bahwa pada segitiga ABC sudut A = 60^0 dan panjang sisi AB = 2. Sedangkan pada segitiga BCD, satu-satunya petunjuk yang kita miliki hanyalah sudut D = 45^0 .

Langkah 3

Dikarenakan petunjuk pengerjaan pada segitiga siku-siku ABC lebih banyak untuk membantu kita dalam menyelesaikan soal, maka pertama-tama kita akan memperhatikan segitiga siku-siku ABC.

Perhatikan bahwa segitiga siku-siku ABC dan segitiga siku-siku BCD dihubungkan oleh sisi BD. Sehingga sebagai langkah awal dalam pengerjaan kita dapat mencari nilai sisi BD melalui segitiga siku-siku ABC.

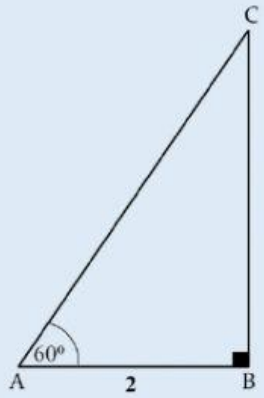
Ayo Kita Ingat Kembali materi Rasio Trigonometri yang telah kita pelajari sebelumnya.

$$\sin A^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} \; ; \; \cos A^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{hipotunesa}} \; ; \; \tan A^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

LIVEWORKSHEETS

CONTOH SOAL

Perhatikan segitiga siku-siku ABC dengan siku-siku di sudut B



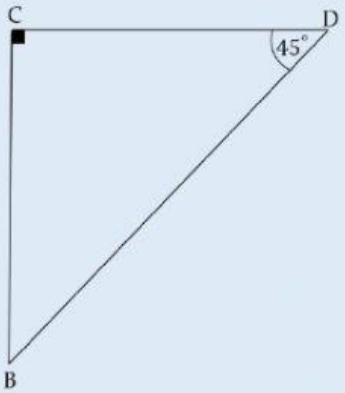
Pada segitiga siku-siku ABC diketahui satu sudut istimewa pada sudut A yaitu 60^0 . Dari petunjuk ini, kita dapat menggunakan nilai rasio trigonometri sudut istimewa 60^0 untuk mencari nilai sisi BC. Perhatikan bahwa sisi BC terletak didepan sudut A = 60^0 , sehingga kita membutuhkan rasio trigonometri yang memiliki unsur sisi depan dalam konsepnya dan didapat dua kemungkinan rasio trigonometri untuk masalah ini yaitu,

$$\sin A^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} \ ; \ \tan A^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

Dimana

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotunesa}} = \frac{BC}{AC} \ ; \ \tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{BC}{AB}$$

Setelah kita menemukan nilai BC yang kita misalkan dengan nilai x melalui segitiga siku-siku ABC, langkah selanjutnya kita dapat menentukan nilai BD melalui segitiga siku-siku BCD. Perhatikan segitiga siku-siku BCD.



BERIKAN TANDA CENTANG JIKA TELAH MENYELESAIKAN MATERI INI

LIVEWORKSHEETS