

PENYELESAIAN SPLTV MENGGUNAKAN DETERMINAN MATRIKS

Perhatikan Penjelasan Berikut!

Bentuk Umum SPLTV (Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel)

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\end{aligned}$$

Ubah ke dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari SPLTV tersebut adalah:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, \text{ dan } z = \frac{D_z}{D}$$

Dengan:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ (determinan matriks koefisien berordo } 3 \times 3 \text{ menggunakan metode sarrus)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ (ganti kolom pertama (koefisien } x \text{) dengan konstanta } d_1, d_2, d_3 \text{ kemudian cari determinannya menggunakan metode sarrus)}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ (ganti kolom pertama (koefisien } y \text{) dengan konstanta } d_1, d_2, d_3 \text{ kemudian cari determinannya menggunakan metode sarrus)}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \text{ (ganti kolom pertama (koefisien } z \text{) dengan konstanta } d_1, d_2, d_3 \text{ kemudian cari determinannya menggunakan metode sarrus)}$$

Contoh:

Selesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) menggunakan determinan matriks:

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 3 \\2x - y + z &= 5 \\x + y + z &= 6\end{aligned}$$

Langkah 1: Mengubah ke bentuk Matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Menghitung D

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 1) + ((-1) \cdot 2 \cdot 1) - (1 \cdot (-1) \cdot (-1)) - (1 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= -1 + 2 - 2 - 1 - 1 - 4 \\ &= -7\end{aligned}$$

Langkah 3: Menghitung D_x

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-1) \cdot (1)) + (2 \cdot 1 \cdot 6) + ((-1) \cdot 5 \cdot 1) - (6 \cdot (-1) \cdot (-1)) - (1 \cdot 1 \cdot 3) - (1 \cdot 5 \cdot 2)$$
$$= -3 + 12 - 5 - 6 - 3 - 10$$
$$=$$

Langkah 4: Menghitung D_y

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 1) + ((-1) \cdot 2 \cdot 6) - (1 \cdot 5 \cdot (-1)) - (6 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 3)$$
$$= 5 + 3 - 12 + 5 - 6 - 6$$
$$=$$

Langkah 5: Menghitung D_z

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) \cdot 6) + (2 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 2 \cdot 1) - (1 \cdot (-1) \cdot 3) - (1 \cdot 5 \cdot 1) - (6 \cdot 2 \cdot 2)$$
$$= -6 + 10 + 6 + 3 - 5 - 24$$
$$=$$

Langkah 6: Menentukan nilai x, y , dan z

$$x = \frac{D_x}{D} = - = -$$

$$y = \frac{D_y}{D} = - = -$$

$$z = \frac{D_z}{D} = - = -$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari SPLTV tersebut adalah $(x, y, z) = (-, -, -)$

INVERS MATRIKS (ORDO 2×2)

A. Definisi

Jika A adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ dan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$, maka terdapat matriks A^{-1} yang memenuhi sifat

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

A disebut *matriks nonsingular* dan A^{-1} disebut *invers* dari matriks A . Jika matriks A^{-1} tidak dapat ditemukan, maka A disebut dengan *matriks singular*.

Catatan:

- Matriks A disebut *matriks nonsingular* jika $|A| \neq 0$
- Matriks A disebut *matriks singular* jika $|A| = 0$

B. Invers Matriks Berordo 2×2

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki invers jika dan hanya jika

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Invers matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adjoin}(A)$$

dengan $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ dan $\text{Adjoin}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

C. Contoh dan Penyelesaiannya

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Langkah 1: Menentukan determinan matriks A yaitu $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (-1)(-7) = 6 - 7 = -1$$

Langkah 2: Menentukan $\text{Adjoin}(A)$

$$\text{Adjoin}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -(-7) \\ -(-1) & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Menentukan invers matriks A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adjoin}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

D. Latihan Terbimbing

Lengkapilah bagian-bagian berikut!

Tentukan invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$!

Penyelesaian:

Langkah 1: Menentukan determinan matriks B yaitu $|B|$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (\dots)(\dots) - (\dots)(\dots) \\ &= (\dots) - (\dots) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Langkah 2: Menentukan $Adjoin(B)$

$$Adjoin(B) = \begin{bmatrix} (\dots) & -(\dots) \\ -(\dots) & (\dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Menentukan invers matriks B

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adjoin(B)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(\dots)} \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix} = (\dots) \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix}$ adalah $B^{-1} = \begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix}$