

Nama:

Hari, Tanggal:

Kelas:

PENERAPAN DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS UNTUK MENYELESAIKAN SPLTV

1. Menyelesaikan SPLTV Menggunakan Invers Matriks

Perhatikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut ini:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Bentuk di atas diubah ke bentuk matriks berikut ini.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Secara umum, bentuk ini ditulis sebagai persamaan matriks:

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

2. Menyelesaikan SPLTV Menggunakan Determinan Matriks/ Metode Cramer

Perhatikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut ini:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Bentuk di atas diubah ke bentuk matriks berikut ini.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Ketentuan determinan matriks:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

Nilai x, y , dan z ditentukan oleh:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Soal:

Bu Hana mempunyai toko sembako. Ia menjual beras yang dikemas dalam tiga jenis kemasan yaitu kemasan kecil, kemasan sedang, dan kemasan besar.

Pada hari pertama terjual 3 kemasan kecil, 1 kemasan sedang, dan 2 kemasan besar. Jumlah massa beras 31 kg.

Pada hari kedua terjual 6 kemasan kecil, 3 kemasan sedang, dan 5 kemasan besar. Jumlah massa beras 77 kg.

Pada hari ketiga terjual 2 kemasan kecil, 6 kemasan sedang, dan 3 kemasan besar. Jumlah massa beras 64 kg.

Berdasarkan penjelasan di atas, tentukan:

- Perkalian matriks yang mewakili hubungan antara massa beras dalam setiap jenis kemasan dan massa beras
- Massa beras dalam setiap jenis kemasan (dengan metode invers matriks dan metode determinan)
- Massa beras yang terjual jika pada hari keempat terjual 5 kemasan kecil, 8 kemasan sedang, dan 10 kemasan besar.

Penyelesaian:

- a. Misalkan:

x = massa beras dalam setiap kemasan kecil

y = massa beras dalam setiap kemasan sedang

z = massa beras dalam setiap kemasan besar

Dari permasalahan di atas diperoleh SPLTV sebagai berikut:

$$... + y + 2z = 31 \quad \dots (1)$$

$$6x + 3y + \dots = 77 \quad \dots (2)$$

$$2x + \dots + 3z = 64 \quad \dots (3)$$

Sistem persamaan linear di atas diubah menjadi perkalian matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 77 \\ 64 \end{pmatrix}$$

- b. Menentukan Massa beras dalam setiap jenis kemasan

1) metode invers matriks

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 31 \\ 77 \\ 64 \end{pmatrix}}_B$$

$$\begin{aligned}
 \text{Det}(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 27 + \dots + \dots - \dots - 90 - \dots \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Minor

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 30 = -21$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} = \dots - \dots = \dots$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 16$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} = \dots - \dots = \dots$$

Kofaktor

$$\text{Kof}(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Kof}(A) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Adjoin

$$\text{Adj}(A) (\text{kof}(A))^t = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Diperoleh matriks $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

2) metode determinan/ cramer

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 77 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \quad & 1 & 2 \\ \quad & 3 & 5 \\ \quad & 6 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & \quad & 2 \\ 6 & \quad & 5 \\ 2 & \quad & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \quad \\ 6 & 3 & \quad \\ 2 & 6 & \quad \end{vmatrix} = \dots$$

Nilai x, y , dan z ditentukan oleh:

$$x = \frac{D_x}{D} = \dots = \dots$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \dots = \dots$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \dots = \dots$$

c. Pada hari keempat terjual 5 kemasan kecil, 8 kemasan sedang, dan 10 kemasan besar, sehingga:

$$5x + 8y + 10z = 5 \times \dots + 8 \times \dots + 10 \times \dots$$

$$= \dots + \dots + \dots$$

$$= \dots$$

Jadi massa total beras yang terjual pada hari keempat adalah ... kg.