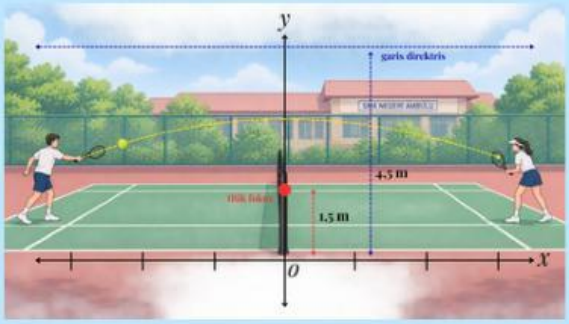
Orientasi Murid pada Masalah



SMA Negeri Ambulu memiliki lapangan tenis yang digunakan untuk kegiatan olahraga dan latihan. Dalam permainan tenis, bola yang dipukul bergerak mengikuti lintasan melengkung melewati net dan jatuh di area lawan. Untuk mengevaluasi hasil pukulan dan menentukan strategi latihan yang sesuai, pelatih perlu memahami bentuk lintasan bola yang dihasilkan oleh murid.

Pada suatu latihan, pelatih mengamati lintasan bola seperti pada ilustrasi. Perhatikan posisi titik fokus dan garis direktris pada gambar. Permukaan lapangan berimpit dengan sumbu x, pelatih ingin mengetahui karakteristik lintasan dan arah gerak bola saat melewati net pada titik tertentu.

Pada latihan selanjutnya, hasil evaluasi menunjukkan bahwa bola melewati net pada ketinggian yang masih terlalu rendah. Bagaimana pelatih dapat menyesuaikan model parabola agar bola melewati net pada ketinggian yang lebih tinggi dengan tetap mempertahankan ketinggian titik puncak lintasan?

Mari selidiki masalah tersebut dengan menentukan unsur-unsur parabola, membangun persamaan lintasan bola, menganalisis garis singgung pada titik yang diamati, serta mengeksplorasi perubahan bentuk parabola.

MARI MENGINGAT KEMBALI



Irisan kerucut (*conic sections*) dihasilkan dari perpotongan sebuah bidang datar dengan sebuah kerucut tegak beralas lingkaran (Stewart et al., 2021).

Bentuk kurva yang dihasilkan bergantung pada posisi dan kemiringan bidang pemotong terhadap sumbu kerucut.

LIVEWORKSHEETS

Perbedaan posisi bidang pemotong tersebut menghasilkan beberapa jenis kurva, salah satunya adalah bentuk parabola.

Mari kita perhatikan ilustrasi perpotongan kerucut dengan sebuah bidang datar dari *GeoGebra* berikut ini!



Sedangkan **Parabola** sendiri adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap (fokus) dan suatu garis tetap (direktriks) (Susanto, 2012). Perhatikan ilustrasi pada GeoGebra berikut ini!



- Titik tertentu disebut titik fokus (F).
- Garis tertentu disebut garis direktris.
- Garis yang melalui fokus dan tegak lurus terhadap direktris disebut sumbu simetri.
- Titik perpotongan parabola dengan sumbu simetri disebut titik puncak (V).
- Latus rektum adalah garis yang melalui fokus, tegak lurus terhadap sumbu simetri, dan memotong parabola di dua titik.

Perlu diingat bahwa titik puncak terletak di tengah-tengah antara titik fokus dan garis direktris.

LIVEWORKSHEETS

Persamaan Parabola

Untuk menentukan persamaan parabola, perhatikan titik puncak, sumbu simetri, fokus, direktris, dan nilai *p*. Nilai *p* menyatakan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

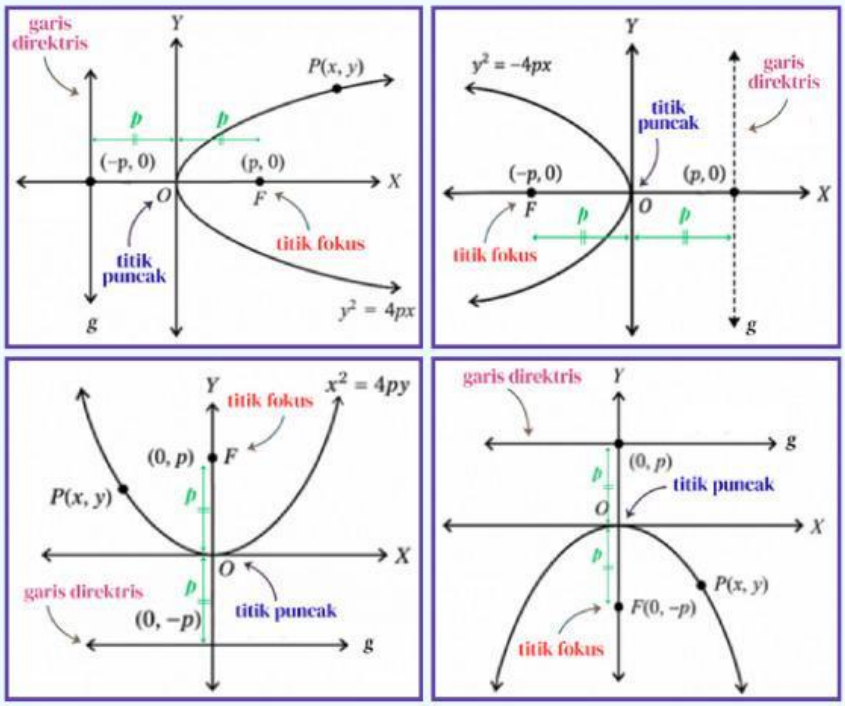
Perhatikan ilustrasi pada *GeoGebra* berikut ini!

Eksplorasi dengan GeoGebra

BUKA GEOGEBRA

Melalui konstruksi pada GeoGebra tersebut, berbagai posisi titik puncak dan fokus dapat ditunjukkan sehingga kita dapat melihat hubungan antara unsur-unsur parabola, arah bukaannya, dan persamaannya.

A. Puncak di O(0, 0)

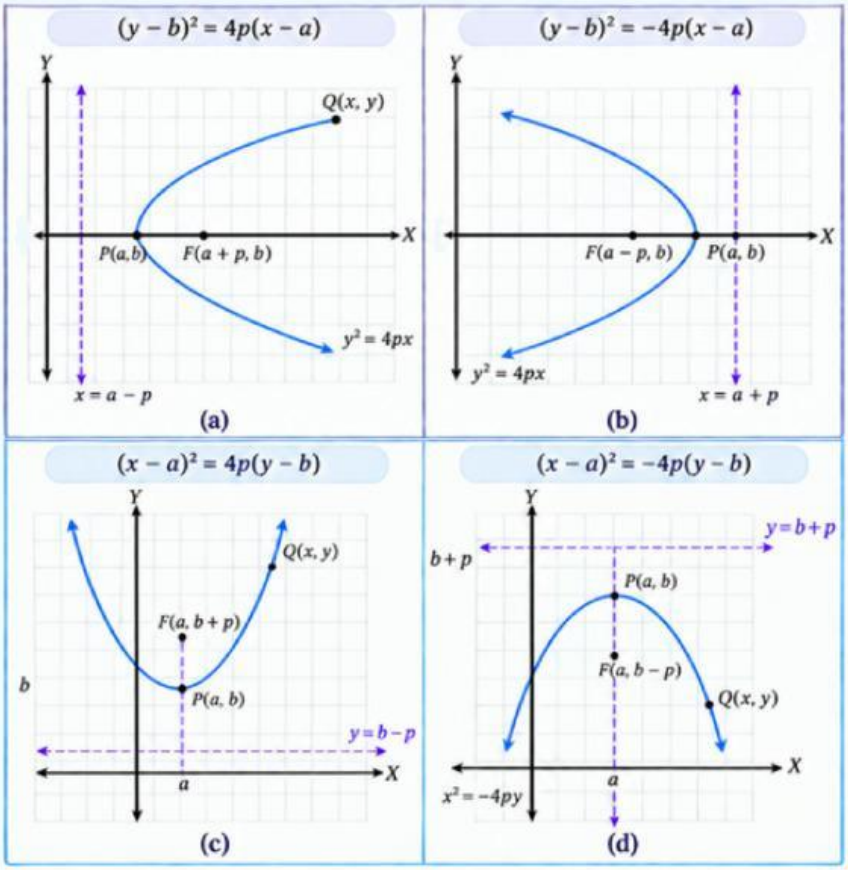


LIVEWORKSHEETS

Persamaan	Arah bukaan	Fokus	Direktris	Sumbu Simetri
$y^2 = 4px$	ke kanan jika $p > 0$	$F(p, 0)$	$x = -p$	$y = 0$
$y^2 = -4px$	ke kiri jika $p > 0$	$F(-p, 0)$	$x = p$	$y = 0$
$x^2 = 4py$	ke atas jika $p > 0$	$F(0, p)$	$y = -p$	$x = 0$
$x^2 = -4py$	ke bawah jika $p > 0$	$F(0, -p)$	$y = p$	$x = 0$

Panjang latus rektum: $L = |4p|$

B. Puncak di P(a, b)



Persamaan	Arah bukaan
$(y-b)^2 = 4p(x-a)$	ke kanan
$(y-b)^2 = -4p(x-a)$	ke kiri
$(x-a)^2 = 4p(y-b)$	ke atas
$(x-a)^2 = -4p(y-b)$	ke bawah

LIVEWORKSHEETS

Untuk $(y-b)^2 = 4p(x-a)$, diperoleh:

- Titik puncak: $V(a, b)$
- Fokus: $F(a+p, b)$
- Direktris: $x = a-p$
- Sumbu simetri: $y = b$
- Panjang latus rektum: $|4p|$

Bentuk lain mengikuti arah bukaan yang sesuai

Garis Singgung Parabola

Garis singgung adalah garis yang memiliki satu titik persekutuan dengan parabola pada titik singgung tertentu. Jika titik singgungnya adalah $T(x_1, y_1)$, persamaan garis singgung dapat ditentukan berdasarkan bentuk persamaan parabolanya.

Persamaan Parabola	Persamaan Garis Singgung
$y^2 = 4px$	$y_1y = 2p(x + x_1)$
$y^2 = -4px$	$y_1y = -2p(x + x_1)$
$x^2 = 4py$	$x_1x = 2p(y + y_1)$
$x^2 = -4py$	$x_1x = -2p(y + y_1)$
$(y-b)^2 = 4p(x-a)$	$(y_1-b)(y-b) = 2p(x_1 + x - 2a)$
$(y-b)^2 = -4p(x-a)$	$(y_1-b)(y-b) = -2p(x_1 + x - 2a)$
$(x-a)^2 = 4p(y-b)$	$(x_1-a)(x-a) = 2p(y_1 + y - 2b)$
$(x-a)^2 = -4p(y-b)$	$(x_1-a)(x-a) = -2p(y_1 + y - 2b)$

Perlu diingat untuk menentukan garis singgung, tentukan terlebih dahulu persamaan parabola, nilai p, dan titik singgung (x_1, y_1).

LIVEWORKSHEETS

Mengorganisir Murid dalam Tim Belajar

Mari Menyelidiki!

Sekarang, saatnya kalian menyelidiki permasalahan melalui setiap **"Kegiatan"** pada LKM. Bergabunglah dengan kelompok yang telah ditentukan oleh guru.

Diskusikan setiap aktivitas pada LKM bersama anggota kelompokmu, saling bertukar ide, dan bekerja sama untuk menemukan solusi dari permasalahan yang diberikan!

KEGIATAN 1

Mari Mengenali Unsur Parabola

Aktivitas 1.1 Hubungkan Unsur dan Pengertiannya

Sebelum membantu pelatih menganalisis lintasan bola, kalian perlu memahami pengertian beberapa unsur parabola terlebih dahulu.

Hubungkan unsur parabola berikut dengan pengertian yang sesuai melalui garis lurus sebagaimana contoh.

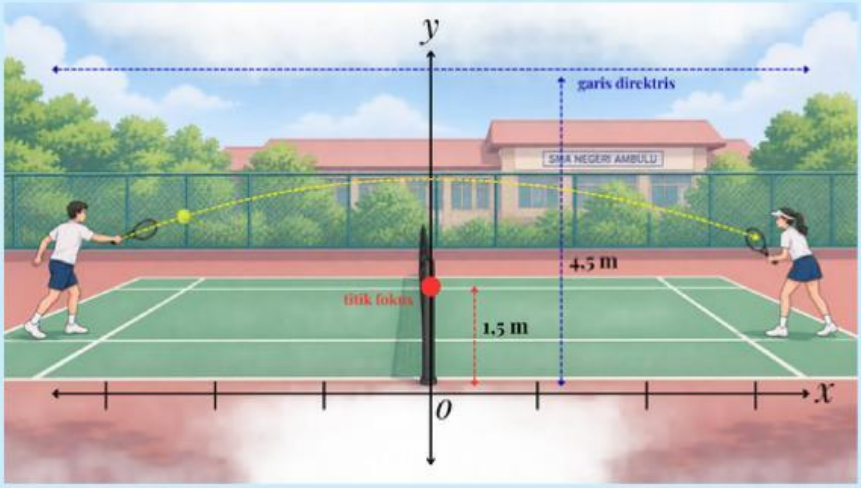
UNSUR	PENGERTIAN
Titik Fokus	Garis yang melalui fokus dan tegak lurus direktris
Garis Direktris	Garis melalui fokus yang tegak lurus sumbu simetri
Sumbu Simetri	Titik perpotongan parabola dengan sumbu simetri
Titik Puncak	Garis tertentu yang menjadi acuan jarak parabola
Latus Rektum	Titik tertentu yang menjadi acuan jarak parabola

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 2

Mari Mengidentifikasi Informasi

Perhatikan Orientasi Masalah Lapangan Tenis yang sudah dipaparkan



Aktivitas 2.1 Temukan Informasi Penting

Centang informasi yang kalian anggap benar dari beberapa pernyataan berikut, berdasarkan orientasi masalah lintasan bola yang sudah disajikan sebelumnya.

- ☐ Permukaan tanah berimpit dengan sumbu (X).
- ☐ Garis direktris berada 4,5 meter di atas permukaan tanah.
- ☐ Garis direktris sejajar dengan sumbu (X).
- ☐ Titik fokus berada 1,5 meter di atas permukaan tanah.
- ☐ Titik puncak berada 4,5 meter di bawah permukaan tanah.

Aktivitas 2.2 Tuliskan Data yang Diketahui

Berdasarkan orientasi masalah lintasan bola yang sudah disajikan, tuliskan:

Persamaan untuk permukaan tanah	: y =	
Ketinggian titik fokus dari permukaan tanah	:	m
Ketinggian garis direktris dari permukaan tanah	:	m

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 3

Mari Menentukan Unsur Parabola

Aktivitas 3.1 Menyusun Masing-Masing Unsur Parabola

Berdasarkan orientasi masalah lintasan bola tenis yang sudah disajikan, seret dan susun kotak agar mendapatkan unsur-unsur parabola yang benar

Titik Fokus	:		=		4,5	V	F
Garis Direktris	:		=		y	5	(0, 3)
Sumbu Simetri	:		=		(0, 1,5)	x	0
Titik Puncak	:		=		p	(0, 15)	3

KEGIATAN 4

Mari Menentukan Nilai (p)

Setelah menentukan titik fokus dan titik puncak pada **Kegiatan** sebelumnya, sekarang tentukan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

Aktivitas 4.1 Mengamati Posisi Titik Fokus

Jika titik fokus berada _____ titik puncak, maka ke arah manakah parabola membuka? _____

Aktivitas 4.2 Menentukan Nilai p

Nilai (p) menyatakan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

Diketahui : Titik Fokus $F = (0, 1{,}5)$

Titik Puncak $V = (0, 3)$

Gunakan rumus : $p = |y_F - y_V|$

$p = |\ __\ - __\ |$

$p = |\ __\ |$

Diperoleh nilai p _____ 0, menunjukkan parabola membuka _____

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 4.3 Menentukan Makna Nilai *p*

Sehingga, dapat kita simpulkan

Jika titik fokus berada di atas titik puncak, parabola membuka ke

Jika titik fokus berada di bawah titik puncak, parabola membuka ke

KEGIATAN 5

Mari Menyusun Persamaan Parabola

Sekarang pelatih telah mengetahui:

$V = (0, 3)$ dan $p =$

Karena sumbu simetri parabola vertikal, bentuk umum persamaan parabolanya adalah $(x - a)^2 =$ dengan titik puncak $V = (a, b)$.

Aktivitas 5.1 Melengkapi Unsur Persamaan

Berdasarkan informasi di atas, bantu pelatih melengkapi nilai yang dibutuhkan

$a = 0$

$b =$

$p =$

Aktivitas 5.2 Menyusun Persamaan

Substitusi nilai yang diperoleh pada **Aktivitas 5.1** ke dalam persamaan parabola

$(x - a)^2$	=	$4p(y - b)$
	=	
	=	

Sehingga diperoleh persamaan $x^2 =$

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 6

Mari Memeriksa dengan *GeoGebra*

Gunakan ilustrasi *GeoGebra* berikut ini!



Substitusi persamaan yang diperoleh pada **Aktivitas 5.2**
Kemudian amati grafik yang terbentuk!

Aktivitas 6.1 Memeriksa Unsur Parabola

Berdasarkan **Kegiatan 5**, pilihlah pernyataan di bawah ini yang sesuai.

- ☐ Titik puncak berada di (0, 3).
- ☐ Fokus berada di (0, 1,5).
- ☐ Sumbu simetri adalah ($x = 0$).
- ☐ Direktris adalah ($y = 4{,}5$).
- ☐ Parabola membuka ke atas.
- ☐ Parabola membuka ke bawah.

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 7

Mari Menentukan Garis Singgung

Rancangan lintasan telah diperoleh. Sekarang bantu pelatih untuk mengetahui tingkat kemiringan lintasan pada titik T = (3, 1,5), dengan persamaan parabola yang sudah diperoleh pada **Aktivitas 5.2**.

Aktivitas 7.1 Memeriksa Titik Singgung

Substitusikan titik (3, 1,5) ke persamaan yang diperoleh pada **Aktivitas 5.2**.

$(3)^2$	=	
	=	
	=	

Apakah titik (3, 1,5) terletak pada parabola?

Aktivitas 7.2 Menentukan Persamaan Garis Singgung

Untuk parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$, persamaan garis singgung yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ adalah : $(x - a)(x_1 - a) = 2p(y + y_1 - 2b)$

Dengan diketahui: a = **0** serta x_1 =

b = y_1 =

p =

Aktivitas 7.3 Menyusun Persamaan

Substitusi nilai yang diperoleh pada **Aktivitas 7.2** ke persamaan garis singgung

$(x - a)(x_1 - a)$	=	$2p(y + y_1 - 2b)$
	=	
	=	
	=	
	=	
	=	

Diperoleh persamaan garis singgung parabola pada titik T(3, 1,5) adalah:

	=	

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 8

Mari Merancang Strategi Baru

Pelatih ingin menyesuaikan lintasan bola yang:

- memiliki tinggi titik puncak yang sama,
- memiliki sumbu simetri yang sama,
- tetapi **ketinggian bola saat melewati net lebih tinggi**.

Gunakan *GeoGebra* berikut untuk merancang beberapa kemungkinan parabola dengan titik puncak yang sama. Kemudian amati perubahan pada grafik.



Aktivitas 8.1 Menemukan Pola

Setelah melakukan sebuah percobaan melalui *GeoGebra* tersebut, pernyataan mana sajakah berikut ini yang dirasa benar? Bantu pelatih menyentang pernyataan yang kalian anggap benar.

- ☐ Titik puncak tetap.
- ☐ Sumbu simetri tetap.
- ☐ Nilai $|p|$ diperkecil.
- ☐ Posisi fokus berubah.
- ☐ Posisi direktris berubah.
- ☐ Parabola menjadi lebih sempit.
- ☐ Lintasan bola menjadi lebih tinggi.
- ☐ Parabola menjadi lebih rendah.

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 8.2 Menentukan Unsur yang Diubah

Jika titik puncak tetap tetapi lintasan bola ingin dibuat lebih tinggi, maka .... (pilih 1 jawaban yang benar).

- A. Titik puncak harus dipindahkan.
- B. Sumbu simetri harus diubah.
- C. Nilai $|p|$ diperbesar
- D. Nilai $|p|$ diperkecil.
- D. Titik puncak dan sumbu simetri harus diubah.

Aktivitas 8.3 Menjelaskan Pengaruh Perubahan

Semakin kecil nilai $|p|$, maka bentuk dan lintasan parabola menjadi _____, sedangkan titik puncak dan sumbu simetri tetap.



Mengembangkan dan Menyajikan Hasil

Mari Menunjukkan Hasil!

Setelah menyelesaikan setiap **"Kegiatan"** pada LKM, presentasikan hasil diskusi kelompok di depan kelas.



Menganalisis dan Mengevaluasi

Mari Merefleksi dan Mengevaluasi!

Setelah melakukan berbagai **Aktivitas** dan eksplorasi dengan *GeoGebra*, apa saja yang telah kalian temukan? Tuliskan kesimpulan berdasarkan hasil penyelidikan kalian pada lembar di bawah ini.

LIVEWORKSHEETS

Lembar Kesimpulan

LATIHAN SOAL

1. Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, persamaan garis direktris, persamaan sumbu simetri, dari persamaan parabola $(y + 1)^2 = 12(x - 3)$!
2. Sebuah parabola memiliki titik puncak $V(1, 4)$ dan titik fokus $F(1, 1)$. Tentukan persamaan parabola dan persamaan garis direktrisnya!
3. Diketahui sebuah parabola memiliki persamaan $x^2 = -12y$. Tentukan arah bukaan parabola dan posisi titik fokus terhadap titik puncaknya. Jelaskan alasannya berdasarkan nilai p!
4. Sebuah parabola memiliki persamaan $y^2 = 16x$. Titik (4, 8) terletak pada parabola tersebut. Tentukan persamaan garis singgung parabola yang melalui titik tersebut!

LIVEWORKSHEETS

DAFTAR PUSTAKA

Rahmasari, Y. D. N. (n.d.). Modul Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII LKS Eksis. Citra Pustaka.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2021). Calculus: Early Transcendentals (9th ed.). Cengage Learning.

Susanto. (2012). Geometri Analitik Datar. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember

PROFIL PENYUSUN



NAMA : Niken Dwi Putri Indriani
NIM : 230210101089
EMAIL : hello.nikend@gmail.com
PROGRAM STUDI : Pendidikan Matematika
FAKULTAS : Keguruan dan Ilmu Pendidikan
UNIVERSITAS : Universitas Jember

LIVEWORKSHEETS