

Тригонометричні вирази. Завдання ЗНО/НМТ

Функція	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sin	0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує
ctg	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0

Знаходження значень невідомих тригонометричних функцій за відомими:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Тригонометричні функції суми кутів:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Формули зведення:

1. Визначити знак функції для даного кута.

Функція	(0,90°)	(90°,180°)	(180°,270°)	(270°,360°)
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg,ctg	+	-	+	-

2. Якщо перехід здійснено через π , 2π функцію залишаємо; якщо ні - то замінюємо на відповідну з пари (sin,cos), (tg,ctg)

Тригонометричні функції подвійного аргументу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\frac{2tg\alpha}{tg2\alpha = 1 - tg^2\alpha}$$

Сума та різниця тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Формули половинного аргументу:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$1. \quad 2021. \quad \frac{7 - (\sin^2\beta + \cos^2\beta)}{3\sin^2\beta + 3\cos^2\beta} = ?$$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	12	2

$$Д. \quad \frac{7 - (\sin^2\beta + \cos^2\beta)}{3\sin^2\beta + 3\cos^2\beta} = \frac{7 - 1}{3(\sin^2\beta + \cos^2\beta)} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$2. \quad 2021. \quad \sin^2 2x =$$

А	Б	В	Г	Д
$2\sin^2 x$	$4\sin^2 x$	$4\sin^2 x \cos^2 x$	$2\sin^2 x \cos^2 x$	$\sin 4x^2$

В.

$$\sin^2 2x = (2\sin x \cos x)^2 = 4\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$3. \quad 2021. \quad \text{Спростіть вираз } 2\cos(450^\circ + \alpha) - \sin\alpha.$$

А	Б	В	Г	Д
$\sin\alpha$	$-3\sin\alpha$	$-2\cos\alpha - \sin\alpha$	$2\cos\alpha - \sin\alpha$	$3\sin\alpha$

Б.

$$2\cos(450^\circ + \alpha) - \sin\alpha = 2\cos((360^\circ + 90^\circ) + \alpha) - \sin\alpha = 2\cos(90^\circ + \alpha) - \sin\alpha = -2\sin\alpha - \sin\alpha = -3\sin\alpha.$$

4. 2020. $\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \alpha} = ?$

А	Б	В	Г	Д
$\sin \alpha$	$\frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\cos \alpha$	1

Б.

$$\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

5. 2019. Якому проміжку належить значення виразу $\sin \frac{7\pi}{6} - 1$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; +\infty)$

Б.

$$\sin \frac{7\pi}{6} - 1 = \sin \frac{6\pi + \pi}{6} - 1 = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) - 1 = -\sin \frac{\pi}{6} - 1 = -0,5 - 1 = -1,5. \text{ Дане число належить проміжку } [-2; -1).$$

6. Обчисліть значення виразу $4\sin^2 \alpha$, якщо $4\cos^2 \alpha = 1$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	4	0

А.

Якщо основну тригонометричну тотожність помножити на 4, то маємо $4\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha = 4$. Підставивши у цю рівність замість $4\cos^2 \alpha$ 1 отримуємо $4\sin^2 \alpha + 1 = 4$. Звідси $4\sin^2 \alpha = 3$.

7. 2020. Спростіть вираз $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$	1	$\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$

Д.

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

8. 2019. Спростіть вираз $2\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2\alpha$	$2\cos 2\alpha$	$\frac{2\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$	$2\sin 2\alpha$	$\sin 2\alpha$

Д.

$$2\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2\sin^2\alpha \cdot (\cos\alpha : \sin\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

9. $\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = ?$

А	Б	В	Г	Д
-1	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	1

А.

$$\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha} = -1.$$

10. Обчисліть значення виразу $\sin\alpha + \sin\beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	інша

В.

З рівності $\alpha - \beta = 180^\circ$ маємо $\alpha = 180^\circ + \beta$. За формулами зведення $\sin\alpha = \sin(180^\circ + \beta) = -\sin\beta$. Тоді $\sin\alpha + \sin\beta = -\sin\beta + \sin\beta = 0$.

11. $1 - \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha =$

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2\alpha$	$1 - \sin 2\alpha$	0	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$

Д.

$$1 - \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha = 1 - \sin\alpha \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cos\alpha = 1 - \cos\alpha \cdot \cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

12. $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$

А	Б	В	Г	Д
-2	0	1	$2\cos^2\alpha$	$1 + \cos 2\alpha$

Б.

$$1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

13. **2019.** $(1 - \sin^2\alpha) \cdot \operatorname{tg}^2\alpha.$

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\sin^2\alpha$	$\operatorname{ctg}^2\alpha$

Г.

$$(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha : \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha.$$

14. $(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2 \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$	$\sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$

А.

$$(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha.$$

15. Спростіть вираз $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	1

А.

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha.$$

16. Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha).$

А	Б	В	Г	Д
$\cos(2\alpha)$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	1	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	$-\cos(2\alpha)$

Д.

$$\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha (1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.$$

17. Яка з наведених рівностей є тотожністю?

А	Б	В	Г	Д
$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$	$\sin \alpha + \cos \alpha = 1$	$1 + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha$	$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

Д.

Випливає з основної тригонометричної тотожності.

18. 2020. Якщо $2\cos \alpha - 5\sin \alpha = 0$, то $\operatorname{tg} \alpha =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{-5}$	-3	$\frac{5}{-2}$	$\frac{5}{2}$

А.

З даної рівності маємо $5\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Поділивши ліву і праву частину на $5\cos\alpha$, маємо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$.

19. Обчисліть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $4\sin\alpha - \cos\alpha = 2\cos\alpha - \sin\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{5}{3}$

А.

З даної рівності маємо $5\sin\alpha = 3\cos\alpha$. Поділивши ліву і праву частину на $5\cos\alpha$, маємо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.

20. Якщо $2\sin\alpha = \cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha =$

А	Б	В	Г	Д
-2	-0,5	0,2	0,5	2

Г.

Поділивши ліву і праву частину на $2\cos\alpha$, маємо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} = 0,5$.

21. Обчисліть $\cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12}$

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Інша

Б.

$$\cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = (\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12})(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}) = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

22. Обчисліть значення виразу $\sin\frac{7\pi}{2} + \cos 5\pi$.

А	Б	В	Г	Д
-2	1	0	1	2

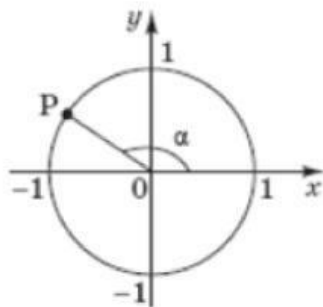
А.
 $\sin \frac{7\pi}{2} + \cos 5\pi = \sin \frac{4\pi + 3\pi}{2} + \cos(4\pi + \pi) = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{2}) + \cos \pi = \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi = -1 - 1 = -2.$

23. Якому проміжку належить значення виразу $\sin 410^\circ$?

А	Б	В	Г	Д
$(-1; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$

Г.
 $\sin 410^\circ = \sin(360^\circ + 50^\circ) = \sin 50^\circ$. Оскільки кут 50° належить першій чверті, де функція $y = \sin \alpha$ зростаюча, то з нерівності $45^\circ < 50^\circ < 60^\circ$ маємо
 $\sin 45^\circ < \sin 50^\circ < \sin 60^\circ$. Отже $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 410^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. На одиничному колі зображено точку $P(-0,8; 0,6)$ і кут α (див. рисунок). Визначте $\cos \alpha$.



А	Б	В	Г	Д
-0,8	0,6	0,8	-0,6	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

А.
Оскільки $\cos \alpha$ відповідає абсцисі (першій координаті) точки P , то $\cos \alpha = -0,8$.

25. Розташуйте в порядку зростання числа: $a = \operatorname{tg} 36^\circ$, $b = \operatorname{tg} 93^\circ$, $c = \operatorname{tg} 180^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$b; c; a$	$c; b; a$	$a; b; c$	$c; a; b$	$b; a; c$

А.
 $c = \operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Так як кут 36° належить першій чверті, то $\operatorname{tg} 36^\circ > 0$. Так як кут 93° належить другій чверті, то $\operatorname{tg} 93^\circ < 0$. Оскільки за зростанням

спочатку йдуть від'ємні числа, потім 0, потім додатні числа, то маємо $\text{tg}93^\circ$; $\text{tg}180^\circ$; $\text{tg}36^\circ$.

26. Укажіть правильну нерівність, якщо $a = \sin 120^\circ$, $b = \cos 120^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$0 < b < a$	$a < 0 < b$	$a < b < 0$	$0 < a < b$	$b < 0 < a$

Д.

Так як кут 120° належить другій чверті, то $\sin 120^\circ > 0$, а $\cos 120^\circ < 0$. Тоді $\cos 120^\circ < 0 < \sin 120^\circ$.

27. Укажіть нерівність, що виконується для $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - \sin^2 \alpha < 0$	$\cos \alpha \cdot \text{tg} \alpha < 0$	$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha < 0$	$1 - \cos^2 \alpha < 0$	$\sin \alpha \cdot \text{ctg} \alpha < 0$

Д.

$1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha > 0$. $\cos \alpha \cdot \text{tg} \alpha = \sin \alpha > 0$ (в другій чверті синус додатний). $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 > 0$. $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha > 0$. $\sin \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = \cos \alpha < 0$ (в другій чверті косинус від'ємний).

28. Відомо, що $\text{ctg} \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. Якого значення може набувати $\sin \alpha$?

А	Б	В	Г	Д
-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Б.

Оскільки $\text{ctg} \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, то кут належить 4 чверті, де синус від'ємний.

Маємо два від'ємних значення -1 та $-\frac{1}{2}$, але при $\sin \alpha = -1$ $\cos \alpha = 0$ (з основної тригонометричної тотожності), що суперечить умові. Отже $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$.

29. До кожного виразу (1-4) доберіть тотожно йому рівний (А-Д).

Запитання	на запитання
1 $1 - \cos^2 \alpha$	А $\cos^2 \alpha$
2 $2 \sin \alpha \cos \alpha$	Б $\cos 2\alpha$
3 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	В $\sin 2\alpha$
4 $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$	Г $-\cos 2\alpha$
	Д $\sin^2 \alpha$

1-Д, 2-В, 3-Б, 4-А.

1) $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

- 2) $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.
 3) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.
 4) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

30. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha = 15^\circ$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin(2 \cdot \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin(2 \cdot 15^\circ)} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4. \end{aligned}$$

31. Обчисліть $2\sqrt{13}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$.

Нехай $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = x$. Тоді ми маємо, що потрібно знайти значення $2\sqrt{13}\cos x$. З першої рівності маємо $\frac{2}{3} = \operatorname{tg} x$. Підставимо це

значення у тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \frac{4}{9} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{13}{9} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{13}{9} &= \cos^2 x \\ \cos x &= \frac{\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Підставивши це значення у завдання маємо $2\sqrt{13}\cos x = 2\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = 6$.

32. Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$.
-0,8.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1} = \frac{\frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} = -0,8. \end{aligned}$$

33. Обчисліть значення виразу $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha = 1,2$.
0,44.

$\sin\alpha+\cos\alpha = 1,2$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівності.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1,2^2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha = 1,44$$

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha = 1,44$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha = 1,44$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 1,44-1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 0,44.$$