Wikipedia
La enciclopedia libre

Anexo:Derivadas

La operación fundamental en el cálculo diferencial es encontrar una derivada. Esta tabla enlista las derivadas de varias funciones. En lo sucesivo, f y g son funciones de x y c es una constante con respecto a x. Se presupone al conjunto de los números reales. Estas fórmulas son suficientes para diferenciar cualquier función elemental.

Reglas generales de diferenciación

Linealidad

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(cf)' = cf'$$

Regla del producto

$$(fg)' = f' . g + f . g'$$

Regla del cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' . g - f . g'}{g^2}, \qquad g \neq 0$$

Caso particular

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}, \qquad f \neq 0$$

Regla de la cadena

$$(f \circ g)' = f'(g)g'$$

Derivadas de funciones simples

$$\frac{d}{dx}k = 0$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1} \qquad \text{donde } x^c \text{ y } cx^{c-1} \text{ se encuentran definidos}$$

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, \qquad x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^c}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-c}\right) = -cx^{-c-1} = -\frac{c}{x^{c+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \text{ sea } x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}f(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

Derivada de la función inversa

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

para alguna función diferenciable *f* de un argumento real y con valores reales, cuando las composiciones indicadas e inversas existen.

Derivadas de funciones exponenciales y funciones logarítmicas

$$\frac{d}{dx}c^x = c^x \ln c, \qquad c > 0$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\log_c x = \frac{1}{x \ln c} \qquad , c > 0, c \neq 1$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad , x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}x^x = x^x(1 + \ln x)$$

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + \frac{g}{f} f' \right)$$

Derivada de la función potencial exponencial

$$\frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \left(\frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{d}{dx} g(x) \cdot \ln f(x) \right), \qquad f(x) > 0$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

Derivadas trigonométricas cíclicas (Criterios de la primera, segunda y tercera derivadas)

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x^{1}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x^{2}$$

$$\frac{d}{dx} -\operatorname{sen} x = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx} -\cos x = \operatorname{sen} x$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argsenh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argtanh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{sech}\ x = -\tanh x\ \mathrm{sech}\ x$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{csch}\ x = -\ \coth\ x\ \mathrm{csch}\ x$$

$$\frac{d}{dx}\ \coth\ x = -\ \mathrm{csch}^2\ x$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{argsech}\ x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{argcsch}\ x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{argcoth}\ x = \frac{1}{1-x^2}$$

Derivadas de funciones especiales

Función zeta de Riemann

$$(\zeta(x))' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} = -\frac{\ln 2}{2^x} - \frac{\ln 3}{3^x} - \frac{\ln 4}{4^x} - \cdots$$

$$(\zeta(x))' = -\sum_{p\ \text{primo}} \frac{p^{-x}\ln p}{(1-p^{-x})^2} \prod_{q\ \text{primo},\ q\neq p} \frac{1}{1-q^{-x}}$$

Derivadas de distribuciones

$H'(x-a) = \delta(x-a)$ (Función unitaria de Heaviside y Delta de Dirac)

$\mathrm{ramp}'(x) = H(x)$ (Función rampa y función unitaria de Heaviside)

$|x|' = \mathrm{sgn}(x)$ (Valor absoluto y función signo)

Funciones elípticas

Las derivadas de la funciones elípticas de Jacobi son:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\mathrm{sn}\ x = \mathrm{cn}\ x\ \mathrm{dn}\ x \\ \dfrac{d}{dx}\mathrm{dn}\ x = -k^2\mathrm{sn}\ x\ \mathrm{cn}\ x \\ \dfrac{d}{dx}\mathrm{cn}\ x = -\mathrm{sn}\ x\ \mathrm{dn}\ x \\ \dfrac{d}{dx}\mathrm{sc}\ x = \mathrm{dc}\ x\ \mathrm{nc}\ x \end{cases}$$

Derivadas de funciones definidas como integral

La fórmula de Leibniz para diferenciación de integrales establece que:[3]

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,s)\,ds = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\,ds + f(x,g_2(x))\frac{dg_2}{dx} - f(x,g_1(x))\frac{dg_1}{dx}$$

Referencias

1. Demostración de la derivada del seno en wikimatematica (http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Derivadas_de_funciones_trigonom%C3%A9tricas#Derivada_de_seno)
2. Demostración de la derivada del coseno en wikimatematica (http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Derivadas_de_funciones_trigonom%C3%A9tricas#Derivada_de_coseno)
3. Weisstein, Eric W. «Leibniz Integral rule» (http://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html). En Weisstein, Eric W, ed. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Bibliografía

- Spiegel, M. & Abellanas, L.: "*Fórmulas y tablas de matemática aplicada*", Ed. McGraw-Hill, 1988. ISBN 84-7615-197-7.