

LÍMITE

En términos sencillos, es el valor al que una función se acerca a medida que la variable independientemente se aproxima a un punto determinado sin importar lo que ocurra exactamente en ese punto.

Se escribe de la siguiente forma:

Para que un límite exista debe haber un acuerdo entre los dos lados, este se conoce como límites laterales:

Límite por la izquierda:

$$(x \rightarrow a^-)$$

El valor que se acerca a la función desde valores menores que (a)

Límite por la derecha:

$$(x \rightarrow a^+)$$

Es el valor que se acerca en valores mayores que (a)

Pasos para resolver:

1. Sustituir directamente
2. Si hay indeterminación simplificar
3. Si existe una factorización; factorar por el cualquier método conocido y si hay el caso de racionalizar
4. Sustituir otra vez

REGLA DE ORO : el límite existe sí, y solo sí, el límite por la izquierda es igual al límite por la derecha. Si los dos lados apulan a alturas diferentes, el límite no existe.


$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3+3)}{(3-2)} \\ x = \frac{6}{1} \\ x = 6\end{aligned}$$

LÍMITES DE RAÍCES

sensorial

Lim
 $x \rightarrow$ 
coeficiente.

$$\frac{\sqrt{\text{grapes}} - 1}{\text{grapes} - 1}$$

Límites con raíces:

Para resolver límites que involucran raíces especialmente cuando resultan la independiente $\frac{0}{0}$ el método más efectivo es la racionalización.

Concepto clave el conjugado: La idea es eliminar la raíz del numerador o denominador usando la diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)$$

Si tienes raíz de x ($\sqrt{x} - a$) el conjugado será ($\sqrt{x} + a$)

Al multiplicarlos la raíz desaparece.

$$(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)$$

$$(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)$$

$$(\sqrt{x})^2 - a^2$$

$$(x - a^2)$$

Pasos para resolver el límite:

1. Evaluar primero.
2. Multiplicar por el conjugado.
3. Simplificar el numerador aplicando la diferencia de cuadrados.
4. Cancelar términos o simplificar.
5. Sustituir de nuevo y calcular el valor final.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-4}{\sqrt{4}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$x = \frac{0}{2-2}$$
$$= \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)$$
$$x = (\sqrt{4}+2) = (2+2)$$
$$x = 4$$

LÍMITES CON LOGARITMOS

Los límites con logaritmos son un clásico, el secreto está en dominar sus propiedades clave y conocer los límites notables.

Propiedades de los logaritmos: antes de calcular cualquier límite a menudo tendrás que acomodar las expresiones usando estas propiedades.

° Logaritmos de un producto:

° Logaritmo de un cociente:

° Logaritmo de una potencia:

° Gráfico de límites con logaritmos

Es fundamental saber cómo se comporta la función logarítmica natural ($\ln(x)$) en sus extremos, el logaritmo solo existe para números mayores que 0.

Cuando x tiende a ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$x \rightarrow \infty$ (Crece lentamente, pero va al infinito)

Cuando x tiende a cero por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$x \rightarrow 0$ (Se pega al eje "Y" de hacia abajo)

Límites notables con fórmulas directas:

Para resolver límites notables, siempre nos encontramos con una indeterminada.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

De este se deriva otra versión muy común cuando x tiende a ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = 1$$

Pasos para resolver:

1. Encontramos la indeterminación.
2. Aplicamos diferentes propiedades.
3. Aplicamos cualquier propiedad vista.
4. Calculamos el nuevo límite.



INDUCCIÓN A LA DERIVADA

Concepto e Importancia

La matemática elemental analiza situaciones estáticas, pero la derivada permite estudiar el cambio en tiempo real. Define cómo cambia una función "ahora mismo" (de forma instantánea).

- **Diferencia clave:** Mientras que la velocidad promedio mide el cambio en todo un viaje, la derivada funciona como el velocímetro del auto: mide la velocidad exacta en un punto o segundo específico.

Construcción Geométrica y Matemática

Para hallar la derivada de una curva, se realiza un proceso de tres pasos:

1. **Puntos:** Se eligen dos puntos en la curva: un punto x y otro desplazado a una distancia $x + h$.
2. **Pendiente Secante:** Se calcula la pendiente de la línea que cruza ambos puntos:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

1. **Límite Tangente:** Se hace que la distancia h sea casi cero ($h \rightarrow 0$). Al acercarse tanto los puntos, la recta ya no corta la curva, sino que la toca en un solo punto (recta tangente).

La fórmula formal de la derivada es este límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Interpretación de los Resultados

El valor de la derivada analiza el comportamiento de la función en una banda o punto determinado:

- $f'(x) > 0$: La curva está subiendo (pendiente positiva).
- $f'(x) < 0$: La curva está bajando (pendiente negativa).
- $f'(x) = 0$: La curva está plana (indica un punto máximo o mínimo).

Ejemplo Práctico

Para la función de una parábola $f(x) = x^2$, su derivada es $f'(x) = 2x$

Si evaluamos el punto $x = 3$:

$$f'(3) = 2(3) = 6$$

Significado: Justo en el punto $x = 3$, la parábola está creciendo **6 veces más rápido** de lo que avanza en el eje horizontal.

