U.E.C.I.B. "MUYU KAWSAY"

CUADERNILLO

MATEMÁTICAS

TERCER TRIMESTRE

Nombre: Marc Cañar

Curso: 2 BGU "B"

Año Lectivo: 2026

2. Límites con Logaritmos

Los límites con logaritmo son un clásico; el secreto está en dominar sus propiedades y conocer los límites notables. Antes de calcular cualquier límite, a menudo tendrás que acomodar la expresión usando estas propiedades fundamentales:

- **A) Logaritmo de un producto:** $Log_b(X \cdot Y) = Log_b X + Log_b Y$
- **B) Logaritmo de un cociente:** $Log_b(X / Y) = Log_b X - Log_b Y$
- **C) Logaritmo de una potencia:** $Log_b(X^h) = h \cdot Log_b X$

Gráfico y Límites de Logaritmos

Es fundamental saber cómo se comporta la función logarítmica natural de x ($ln(x)$) en sus extremos. Recordando que el logaritmo solo existe para números mayores que 0:

- **Cuando x tiende a infinito:** $Lim_{x \to \infty} ln(x) = \infty$

> **Nota:**
>
> Crece lentamente pero va al infinito.

- **Cuando x tiende a 0 por la derecha:** $Lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$

> **Nota:**
>
> Se pega al eje Y y va hacia abajo.

EJERCICIOS ADICIONALES PROPUESTOS

1. Utilice las propiedades para simplificar y resolver: $Lim_{x \to \infty} [ln(2x) - ln(x)]$.
2. Evaluar aplicando propiedades logarítmicas: $Lim_{x \to 1} ln(x^3)$.

3. Límites con Raíces

Para resolver límites que involucran raíces, especialmente cuando resultan en la indeterminación $0/0$, el método más efectivo es la **racionalización**.

Concepto clave: El conjugado

La idea es eliminar la raíz del numerador o denominador usando la diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Si tienes $\sqrt{x} - a$, el conjugado sería $\sqrt{x} + a$, de manera que:

$$(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a) = (\sqrt{x})^2 - a^2 = x - a^2$$

Pasos para resolver:

1. Evaluar y sustituir para encontrar la indeterminación.
2. Multiplicar numerador y denominador por el conjugado.
3. Simplificar aplicando la diferencia de cuadrados.
4. Cancelar términos comunes.
5. Sustituir de nuevo y encontrar el valor final.

Ejemplo del Cuaderno

Resolver el límite: $Lim_{x \to 4} (\sqrt{x} - 2) / (x - 4)$

1. Evaluación inicial: $(\sqrt{4} - 2) / (4 - 4) = (2 - 2) / (4 - 4) = 0/0$ (Indeterminado).

2. Multiplicación por el conjugado $(\sqrt{x} + 2)$:

$$Lim_{x \to 4} [(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

3. Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador:

$$Lim_{x \to 4} ((\sqrt{x})^2 - 2^2) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] = Lim_{x \to 4} (x - 4) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

4. Cancelando el término común $(x - 4)$:

$$Lim_{x \to 4} 1 / (\sqrt{x} + 2)$$

5. Sustituyendo el valor $x = 4$:

$$1 / (\sqrt{4} + 2) = 1 / (2 + 2) = 1/4$$

EJERCICIOS ADICIONALES PROPUESTOS

1. Resolver racionalizando el numerador: $Lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1) / (x - 1)$.
2. Calcular el siguiente límite con raíz: $Lim_{x \to 9} (\sqrt{x} - 3) / (x - 9)$.

4. Inducción a las Derivadas

La derivada es una de las herramientas más poderosas de la matemática y nace directamente del concepto de límite. Representa la **razón de cambio instantánea** de una función o, geométricamente, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

La Pendiente y la Recta Secante

Si tomamos dos puntos en una curva, la recta que los une es una secante. A medida que acercamos esos dos puntos haciendo que la distancia entre ellos (Δx o h) tienda a cero, la recta secante se transforma en la **recta tangente**.

Definición Formal por Límite

La derivada de una función $f(x)$, denotada como $f'(x)$, se define formalmente mediante el límite del cociente incremental:

$$f'(x) = Lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Regla Básica de Derivación (Función Potencial)

A partir de la definición formal, se deducen reglas prácticas. La más fundamental es la regla de la potencia:

Si $f(x) = x^n$, entonces su derivada es: $f'(x) = n \cdot x^{n - 1}$

Ejemplo intuitivo: Si tienes la función de posición de un auto, la derivada en un instante preciso te da la velocidad exacta en ese segundo.

Evaluación de Conocimientos

Responda las siguientes preguntas basadas en las secciones estudiadas del cuadernillo.

1. Respecto al "Límite con Valor Absoluto", determine si la siguiente afirmación es Verdadera o Falsa:

"El límite general de una función con valor absoluto en un punto de quiebre siempre existe sin necesidad de evaluar sus límites laterales."

[ ] Verdadero

[ ] Falso

2. Utilizando las "Propiedades de los Límites con Logaritmos", ¿cuál es la expresión equivalente correcta para $Log_b(X / Y)$?

A) $Log_b X + Log_b Y$

B) $Log_b X - Log_b Y$

C) $h \cdot Log_b X$

D) $Log_b X \cdot Log_b Y$

3. En el tema "Límites con Raíces", cuando se presenta la indeterminación $0/0$, el método de la diferencia de cuadrados nos indica que el producto de una expresión por su conjugado $(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)$ da como resultado:

A) $x + a^2$

B) $x^2 - a^2$

C) $x - a^2$

D) $\sqrt{x} - a$