UECIB "MUYU KAWSAY "

LÍMITES

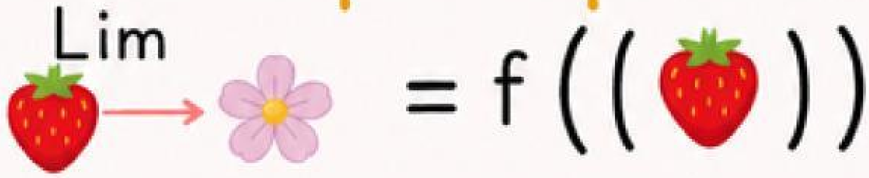
MATEMÁTICAS - TERCER TRIMESTRE

NOMBRE:KIMBERLY SISA

CURSO :2DO BGU "B"

LICENCIADO:TUPAC VALLEJO

Sensopercepción



Límite con valor absoluto

Los límites con valor absoluto evalúan a que valor se aproxima la función cuando x tiende a un punto manejando la magnitud sin importar el signo (distancia al 0). Su concepto clave es definir el valor absoluto como una función a trozos, escribiendo $|x-a|$ como $x-a$ (si $x \geq a$) o $-(x-a)$, si ($x<a$).

Definición de valor absoluto: Representa la distancia a 0:

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0 \text{ ; y } \quad |x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Indeterminación: A menudo, estos límites producen formas indeterminadas (Eje: 0/0) requiniendo a analizar los límites laterales.

Límites laterales: Debido a que la definición cambia de signo, se debe calcular los límites por la izquierda ($x \to a^-$) y por la derecha ($x \to a^+$).

Existencia de límites: El límite general existe si y solo si los límites laterales son

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$|x-3|$

$x-3 \;=>0$

$x-3 \;= 3$

$$\lim_{x\to} \frac{x-3}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x+3} = \frac{3+3}{3+3} = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} = \frac{-x+3}{-x+3} = 0$$

PREGUNTA:

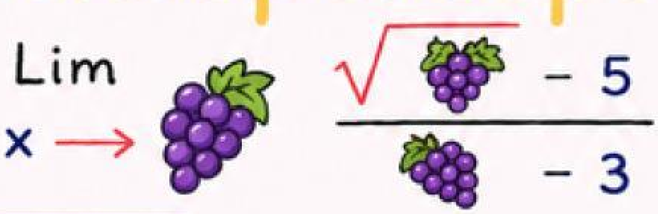
Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -2} \left(\frac{|x+2|}{x+2} \right)$$

¿Cuál es el valor del límite?

A) -1 B) 1 C) 0 D) No existe

Sensopercepción



Límites con raíces

Para resolver límites que involucren raíces especialmente cuando resultan en la indeterminación 0/0, el método más efectivo es la racionalización

El conjugado

La idea es eliminar la raíz del denominador o numerador usando la diferencia de cuadrados

$$(a - b)\ (a + b) = a^2 - b^2$$

Si tienes raíz de menos a $\sqrt{x} - a$ el conjugado sería $\sqrt{x} + a$

$$(\sqrt{x} - a)\ (\sqrt{x} + a)$$
$$((\sqrt{x})^2 - a^2)$$
$$(x - a^2)$$

Pasos para resolver:

1. Evaluar y sustituir para encontrar la indeterminación.
2. Multiplicar por el conjugado.
3. Simplificar aplicando la diferencia de cuadrados.
4. Cancelar términos.
5. Sustituir de nuevo y encontrar el valor final.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4}$$

$$= \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación 0/0

$$\lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)\ (\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)\ (\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{((\sqrt{x})^2 - 2^2)}{(x - 4)\ (\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)\ (\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

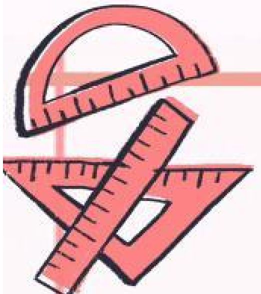
$$= \frac{1}{2 + 2}$$

$$= \frac{1}{4} = \boxed{4}$$

PREGUNTA

¿Cuál es la razón principal para usar el conjugado al resolver límites que resultan en indeterminación 0/0?

A) Para simplificar la raíz.
B) Para eliminar la raíz del denominador o numerador aplicando la diferencia de cuadrados.
C) Para multiplicar ambos términos por cero.
D) Para cambiar el signo de la raíz.



Sensopercepción

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Límites con logaritmos

Los límites con logaritmos son un clásico el secreto está en dominar sus propiedades y conocer los límites notables.

Propiedades de los logaritmos

Antes de calcular cualquier límite, a menudo tendrás que acomodar la expresión usando estas propiedades:

* Logaritmo de un producto $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
* Logaritmo de un cociente $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
* Logaritmo de una potencia $\log_b x^n = n \log_b x$

Gráfico y límites de logaritmo

Es fundamental saber como se comporta la función logaritmo natural ($\ln(x)$ en sus extremos el logaritmo solo existe para números mayores que 0.

* Cuando x tiende a ∞
  crece lentamente pero va al infinito
* Cuando x tiende a 0 por la derecha
  $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Se pega al eje y y hacia abajo.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes es una propiedad correcta de los logaritmos?

A) $\log_b(x+y) = \log_b x + \log_b y$

B) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

C) $\log_b(x^n) = n + \log_b x$

D) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x - \log_b y$

Límites notable con logaritmos

Cuando te encuentras con indeterminaciones $\lim_{x \to 0} \frac{0}{0}$ el siguiente paso será de aplicar cualquiera de sus propiedades $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Pasos para resolver

1. Calcular la indeterminación.
2. Aplicamos cualquiera de sus propiedades en una función continua.
3. Identificamos el valor del límite y resolvemos.

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cdot\sqrt{x+4}+2}{(\sqrt{x+4})^2-4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cdot\sqrt{x+4}+2}{x+4-4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\ln(0)}\cdot\sqrt{x+4}+2}{\cancel{\to 0}}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}+2$$

$$\sqrt{0+4}+2$$

$$\sqrt{4}+2$$

$$2+2=4 \;//$$

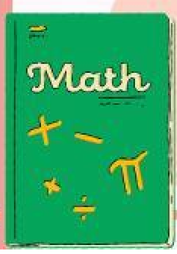
Pregunta

¿Cómo se denomina al procedimiento que permite simplificar una expresión compleja para hallar el valor de un límite notable con logaritmos?

A) Determinación algebraica.

B) Aplicación de propiedades.

C) Sustitución de variables.

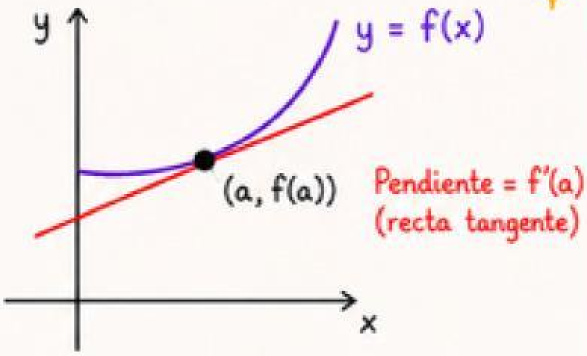


Inducción a la derivada

¿Qué es la derivada?

La derivada mide la razón de cambio instantánea de una función en un punto. Geométricamente, es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces su derivada en a, denotada $f'(a)$, indica cuánto cambia f cuando x cambia una cantidad muy pequeña alrededor de a.



Definición de la derivada

La derivada de f en un punto a se define como el límite del cociente de incrementos cuando h tiende a 0 (con $h \neq 0$):

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Si este límite existe, decimos que f es derivable en a.

La derivada de $f(x)$ se denota $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Interpretación y significado

- $f'(x)$ indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.
- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f está aumentando en x.
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f está disminuyendo en x.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow$ La pendiente es horizontal (posible, máximo o punto de inflexión).
- f' no existe $\Rightarrow$ Puede haber una esquina, cúspide, discontinuidad vertical o tangente vertical.

Reglas básicas de derivación

- $\frac{d}{dx}[c] = 0$ (c constante)
- $\frac{d}{dx}[x] = 1$
- $\frac{d}{dx}[k\,f(x)] = k\,f'(x)$ (k constante)
- $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$
- $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ (regla del producto)
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x) \neq 0)$ (regla del cociente)
- $\frac{d}{dx}[f \circ g](x) = f'(g(x))\,g'(x)$ (regla de la cadena)

Reglas para funciones elementales

- $\frac{d}{dx}[x^n] = n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{R})$
- $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$
- $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$
- $\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$
- $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$
- $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

Ejemplos

- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$
  $f'(x) = 12x^3 - 4x$
- $g(x) = e^x \operatorname{sen} x$
  $g'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
- $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
  $h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- $p(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
  $p'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
- $q(x) = \tan(2x)$
  $q'(x) = 2\sec^2(2x)$
- $r(x) = x^3 e^x$
  $r'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = e^x(3x^2 + x^3)$