

"Las matemáticas no son solo números, son lógica, creatividad y perseverancia."

UNIDAD EDUCATIVA  
COMUNITARIA  
INTERCULTURAL BILINGÜE  
MUYU KAWSAY

Escuela Bilingüe e Intercultural.  
Favoreciendo la manera de pensar, en personas  
creativas y solistas.

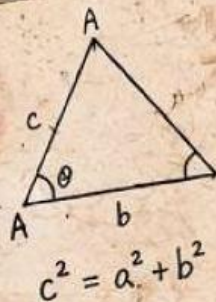
2B

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= L \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= L \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L\end{aligned}$$



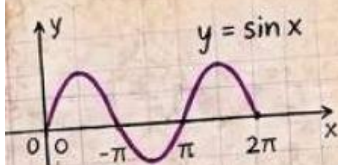
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

# Mallury Morales

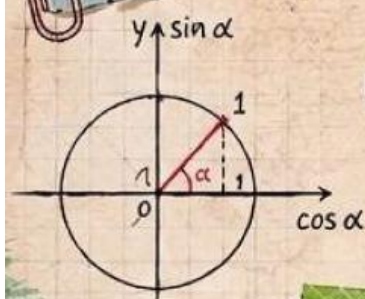


La práctica hace al maestro.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log a + \log b \\ \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \\ \log_a a &= 1\end{aligned}$$



$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

ESTUDIANTE:

Mallury Morales

CURSO Y PARALELO:

Segundo de Bachillerato "B"

DOCENTE:

Lic. Tupac Vallejo

ÁREA:

Matemáticas

TEMAS:

- Límites con valor absoluto
- Límite y racionalización
- Límites con logaritmos
- Inducción a la derivada

Racionalización

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$$

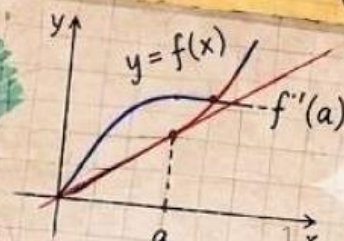
$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

LÍMITE

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

Inducción a la derivada

Si  $f(x) = x^n$ ,  
entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$   
Para  $n=1$ :  $f'(x) = 1$   
Suponga cierto para  $n=k$ ,  
Demuestre para  $n=k+1$ .



SIN MATEMÁTICAS, NO HAY NADA QUE ENTENDER EN ESTE MUNDO.

## 1. Límites con Valor Absoluto

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor se aproxima una función cuando  $x$  tiende a un punto específico, manejando la distancia respecto al origen sin importar el signo algebraico resultante.

### Definición de Valor Absoluto:

Representa la distancia geométrica de un número al origen  $0$ . Formalmente, se define como una función a trozos:

$$|x| = \{x, \text{ si } x \geq 0; -x, \text{ si } x < 0\}$$

### Indeterminación y Límites Laterales:

A menudo, estos límites producen formas indeterminadas del tipo  $0/0$ , lo cual requiere un análisis exhaustivo mediante límites laterales. Debido a que la definición cambia de signo según la aproximación, se deben calcular obligatoriamente:

- **Límite por la izquierda:**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , donde se toma la rama negativa de la definición si el argumento se hace menor que cero.
- **Límite por la derecha:**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , utilizando la rama positiva.

**Existencia del límite:** El límite general existe si y solo si ambos límites laterales son perfectamente finitos e iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

### EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite:  $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3| / (x - 3)$

1. Evaluación directa:  $|3 - 3| / (3 - 3) = 0/0$  (indeterminación).

2. Análisis por izquierda ( $x \rightarrow 3^-$ ): Como  $x < 3$ , entonces  $x - 3 < 0$ , por lo que  $|x - 3| = -(x - 3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-(x - 3)] / (x - 3) = -1$$

3. Análisis por derecha ( $x \rightarrow 3^+$ ): Como  $x > 3$ , entonces  $x - 3 > 0$ , por lo que  $|x - 3| = x - 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) / (x - 3) = 1$$

**Conclusión:** Como los límites laterales son distintos ( $-1 \neq 1$ ), el límite general **no existe**.

#### Tema 2

## 2. Límite y Racionalización

Para resolver límites algebraicos que involucran raíces cuadradas o de mayor orden (especialmente cuando resultan en una indeterminación de la forma  $0/0$ ), el método analítico más efectivo es la **racionalización**.

### Concepto Clave: El Conjugado

La idea central consiste en eliminar la raíz del numerador o del denominador multiplicando toda la fracción por la expresión conjugada correspondiente, aprovechando el producto notable de la **diferencia de cuadrados**:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Si se tiene el término con raíz  $\sqrt{x - a}$ , su conjugado exacto será  $\sqrt{x + a}$ , de manera que al multiplicarlos se obtenga  $(\sqrt{x})^2 - a^2 = x - a^2$ .

### Pasos fundamentales para resolver por racionalización:

- **Evaluar y sustituir:** Introducir el valor de tendencia para identificar la presencia de la indeterminación  $0/0$ .
- **Multiplicar por el conjugado:** Multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado de la sección irracional.
- **Simplificar:** Desarrollar los productos aplicando la diferencia de cuadrados.
- **Cancelar términos comunes:** Eliminar el factor crítico que causa la división por cero.
- **Sustituir de nuevo:** Evaluar la nueva expresión limpia para hallar el valor real del límite.

### EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite:  $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 2) / (x - 4)$

1. Evaluación directa:  $(\sqrt{4} - 2) / (4 - 4) = (2 - 2) / 0 = 0/0$ .

2. Multiplicación por el conjugado  $(\sqrt{x} + 2)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} [(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

3. Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 4} [(\sqrt{x})^2 - 2^2] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

4. Cancelando el factor crítico  $(x - 4)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} 1 / (\sqrt{x} + 2)$$

5. Evaluación final:  $1 / (\sqrt{4} + 2) = 1 / (2 + 2) = 1/4$ .

### Tema 3

## 3. Límites con Logaritmos

Los límites logarítmicos son esenciales en el análisis matemático. El secreto principal para su resolución radica en dominar con absoluta fluidez sus propiedades algebraicas y conocer las estructuras de los límites notables fundamentales.

## Propiedades Esenciales de los Logaritmos:

Antes de ejecutar cualquier proceso de límite, es mandatorio acomodar y transformar la expresión original usando las siguientes identidades:

- **Logaritmo de un producto:**  $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- **Logaritmo de un cociente:**  $\log_b(x / y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- **Logaritmo de una potencia:**  $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$

## Comportamiento Asintótico del Logaritmo Natural $\ln(x)$ :

- Cuando  $x \rightarrow +\infty$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty$  (Crece de forma continua y monótona).
- Cuando  $x \rightarrow 0^+$  (por la derecha):  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  (La curva se asienta verticalmente pegándose al eje "y").

## Límite Notable Logarítmico:

Frente a indeterminaciones de la forma

$0/0$  se recurre a la siguiente equivalencia fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1 + x)] / x = 1$$

### EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1 + 5x)] / x$

1. Al evaluar directamente obtenemos  $\ln(1)/0 = 0/0$ .
2. Multiplicamos y dividimos por 5 para ajustar al límite notable:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot [\ln(1 + 5x)] / (5x)$$

3. Haciendo el cambio de variable  $u = 5x$  (donde si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $u \rightarrow 0$ ):

$$5 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} [\ln(1 + u)] / u = 5 \cdot (1) = 5$$

## 4. Investigación Analítica: Inducción a la Derivada

### 4.1 Origen Conceptual y Geométrico

La derivada nació como la respuesta a dos problemas científicos fundamentales del siglo XVII: la determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado (problema geométrico planteado por Pierre de Fermat) y la descripción de la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento (problema físico analizado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz).

Geométricamente, si tomamos una función continua  $y = f(x)$ , la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos cercanos  $P(x, f(x))$  y  $Q(x + h, f(x + h))$  viene dada por el cociente incremental de Newton:

$$m_{\text{sec}} = [f(x + h) - f(x)] / h$$

Si reducimos de forma progresiva la distancia entre los puntos haciendo que  $h$  tienda a cero, la recta secante pivota y se transforma en la recta tangente a la curva en el punto  $P$ . Por consiguiente, la pendiente de dicha recta tangente es el límite del cociente incremental.

### 4.2 Definición Formal mediante Límites

La derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x$ , denotada como  $f'(x)$  o  $df/dx$  se define rigurosamente como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Siempre que dicho límite exista. Si el límite es finito, se afirma que la función es derivable en ese punto específico.

### 4.3 Demostración por Inducción Matemática de la Regla de las Potencias

Deseamos demostrar que para cualquier función de la forma  $f(x) = x^n$  (donde  $n \in \mathbb{N}$ ), su derivada es  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

#### 1. Base Inductiva (para $n = 1$ ):

Sea  $f(x) = x^1 = x$ . Aplicando la definición formal por límites:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [(x + h) - x] / h = \lim_{h \rightarrow 0} (h / h) = 1$$

Usando la fórmula general:  $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$ . Se cumple perfectamente la base inductiva.

## 2. Hipótesis Inductiva:

Suponemos que la propiedad es completamente cierta para un número entero cualquiera  $n = k$ , es decir:

$$\text{Si } f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

## 3. Tesis Inductiva:

Debemos demostrar que la propiedad se cumple para  $n = k + 1$ , esto es, que si  $g(x) = x^{k+1}$ , entonces su derivada es  $g'(x) = (k + 1)x^k$ .

Podemos descomponer la función utilizando propiedades de las potencias:  $g(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$ . Para derivar esta expresión, aplicamos la **Regla del Producto** ( $[u \cdot v]' = u'v + uv'$ ):

$$g'(x) = [x^k]' \cdot x + x^k \cdot [x]'$$

Sustituyendo la hipótesis inductiva ( $[x^k]' = k \cdot x^{k-1}$ ) y el caso base verificado ( $[x]' = 1$ ):

$$g'(x) = (k \cdot x^{k-1}) \cdot x + x^k \cdot (1)$$

$$g'(x) = k \cdot x^k + x^k$$

Factorizando por término común  $x^k$ :

$$g'(x) = (k + 1) \cdot x^k$$

Queda formalmente demostrado por inducción matemática que la regla rige para todo número entero positivo.

### EJEMPLO 1: APLICACIÓN DIRECTA DE LA REGLA POR DEFINICIÓN DE LÍMITE

Encontrar la derivada de  $f(x) = 3x^2 + 5$  utilizando la definición formal de límite.

1. Planteamiento:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 + 5] - (3x^2 + 5)}{h}$$

2. Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 5 - 3x^2 - 5}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

3. Simplificando términos opuestos en el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

4. Factorizando  $h$  para eliminar la indeterminación:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h)$$

5. Aplicando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ :

$$f'(x) = 6x + 3(0) = 6x$$

### EJEMPLO 2: DERIVACIÓN POR REGLA OPERACIONAL RÁPIDA

Calcular la función derivada de un polinomio de grado superior aplicando la regla de las potencias:  $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$

Aplicamos la linealidad de la derivada y la regla multiplicativa para cada monomio de forma independiente:

$$f'(x) = 4 \cdot (3x^{3-1}) - 2 \cdot (2x^{2-1}) + 7 \cdot (1x^{1-1}) - 0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^1 + 7x^0$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 7$$



