SENSOPERCEPCIÓN E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

1. Concepto de Límite y Propiedades Directas

En matemáticas, unlímitedescribe el valoral queseacerca una función a medida que la variable independiente x se aproxima a un punto determinado. Se denota como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Propiedad de Suma y Resta

El límite de una suma o de una resta de funciones es igual a la suma o resta de los límites de cada función por separado:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Otras Propiedades Clave

- **Producto:** El límite de un producto es el producto de los límites.
- **Cociente:** El límite de una división es la división de los límites, siempre que el denominador no sea cero.
- **Constante:** El límite de un número fijo es el mismo número.

Ejemplo Único

Calcular el límite aplicando la propiedad de suma y resta:

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 + 5x - 4)$$

$$= \lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 5x - \lim_{x \to 2} 4$$

$$= 3(2)^2 + 5(2) - 4$$

$$= 12 + 10 - 4 = 18$$

Pregunta de evaluación:
La propiedad del cociente indica que el límite de una división es igual a la división de los límites de las funciones individuales, sin importar el valor que tome el denominador.

a) Verdadero
b) Falso

2. Límite con Valor Absoluto

Loslímitescon valorabsolutoevalúan a qué valor se aproxima una función manejando la expresión sin importar el signo (distancia al cero). Se define en trozos, donde $|x - a|$ es $x - a$ si $x \geq a$, y $-(x - a)$ si $x < a$.

Ejemplo Único

$$\lim_{x \to 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1 \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

Como los límites laterales son diferentes ($1 \neq -1$), el límite general no existe.

Pregunta de evaluación:
¿Cuándo se afirma que existe el límite general de una función con valor absoluto en un punto dado?

a) Cuando la función está definida en ese punto.

b) Cuando ambos límites laterales existen y son exactamente iguales entre sí.

c) Cuando el resultado de la sustitución directa genera la indeterminación 0/0.

3. Límites con Raíces (Racionalización)

Para resolver límites con raíces que resultan en una indeterminación $\frac{0}{0}$, multiplicamos por el conjugado para formar una diferencia de cuadrados.

Ejemplo Único

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Pregunta de evaluación:
Al resolver el límite $\lim_{x \to -7} \frac{\sqrt{\text{🍇}} - 3}{\text{🍇} - 3}$, ¿cuál es el propósito algebraico principal de multiplicar por el conjugado del numerador?

a) Eliminar la indeterminación factorizando directamente el denominador.

b) Formar una diferencia de cuadrados que permita remover el término radical.

c) Transformar el límite algebraico en un límite logarítmico.

4. Límites al Infinito

Evalúa el comportamiento de una función a medida que la variable independiente x crece sin límite hacia valores extremadamente grandes (∞).

Ejemplo Único

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1} = \frac{5}{2}$$

Pregunta de evaluación:

¿Qué resultado se obtiene al evaluar de forma directa el término $\frac{5}{\infty}$ dentro de un límite al infinito?

a) Infinito (∞)
b) 1
c) Cero (0)

5. Límites Logarítmicos

Límites afectados por un logaritmo, resueltos aplicando propiedades operacionales y el límite notable:

$$lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1$$

Ejemplo Único

$$lim_{x\to 0} \frac{ln(x2 + 5x)}{x} = lim_{x\to 0} ln(x + 5) = ln(5)$$

Pregunta de evaluación:
Según las propiedades de los límites logarítmicos, ¿a qué valor tiende la función $ln(x)$ cuando x se aproxima a cero por la derecha ($x \to 0+$)?

a) Infinito positivo (+∞)
b) Infinito negativo (-∞)
c) 1

INVESTIGACIÓN: INDUCCIÓN A LAS DERIVADAS

La derivada representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado. Se define analíticamente mediante el límite:

$$f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo Único

Encontrar la derivada de la función $f(x) = x2 + 3x$ usando las reglas de derivación directas:

$$f'(x) = 2x^{2-1} + 3(1) = 2x + 3$$

Pregunta de evaluación:
Geométricamente, ¿qué representa el valor numérico obtenido al calcular la primera derivada de una función en un punto específico?

a) El área total encerrada bajo la curva de la función.
b) La pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.
c) El punto exacto donde la función cruza el eje vertical Y.