

BACHILLERATO GENERAL  
UNIFICADO

# CUADERNILLO DIGITAL DE Matemáticas

---

<b>Estudiante</b>	Leonardo Machado
<b>Curso</b>	2do BGU "B"
<b>Docente</b>	Lic. Tupak Vallejo
<b>Asignatura</b>	matemáticas
<b>Temas:</b>	Límites, Raíces, Logaritmos e Inducción a la Derivada

## TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

En matemáticas, un límite describe el valor al que se acerca una función a medida que la variable independiente ( $x$ ) se aproxima a un punto determinado, sin necesidad de llegar a tocar ese punto exactamente. Es, básicamente, el estudio detallado de la tendencia de una función cuando sus variables se aproximan a ciertos entornos localizados.

Se expresa formalmente como:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$$

(El límite de la función  $F(x)$  cuando  $x$  tiende al valor  $a$  es igual a  $L$ )

### Propiedades Principales de los Límites

Estas reglas algebraicas fundamentales operan como herramientas operativas esenciales que permiten simplificar y resolver estructuras de límites complejos de una forma directa y estructurada:

Propiedad	Definición y Expresión Formal
1. Suma y Resta	El límite de una suma o resta es equivalente a la suma o resta de los límites individuales de cada función. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. Producto	El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites individuales de dichas funciones. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. Cociente	El límite de una división es la división de los límites de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea diferente de 0. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] / [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]; \text{ donde } g(x) \neq 0$
4. Constante	El límite de un número fijo (constante $K$ ) cuando la variable tiende a cualquier punto es ese mismo número. $\lim_{x \rightarrow a} K = K$
5. Multiplicación por Constante	

Propiedad	Definición y Expresión Formal
	<p>Se pueden extraer los factores numéricos constantes que multiplican a una función fuera del operador del límite.</p> $\lim_{x \rightarrow a} [K \cdot f(x)] = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
<p><b>6. Potencia y Raíz</b></p>	<p>El límite de una función elevada a una potencia (o bajo una raíz) es igual a la potencia del límite de dicha función.</p> $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$

## TEMA 2: METODOLOGÍA GENERAL Y EJERCICIOS

### Pasos para la Resolución Analítica

1. **Sustitución Directa:** Reemplazar el valor de tendencia original en la variable  $x$  de la función.
2. **Detección de Indeterminación:** Evaluar si el resultado arroja una indeterminación matemática (como el tipo  $0/0$ ).
3. **Simplificación Algebraica:** Utilizar herramientas de álgebra elemental como la Factorización o la Racionalización para eliminar la indeterminación.
4. **Sustitución Final:** Volver a evaluar el límite sustituyendo de nuevo la variable para obtener el valor numérico definitivo.

### EJEMPLO 1: LÍMITES POLINÓMICOS DIRECTOS

Resolver aplicando linealidad y descomposición de propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 5x - 4)$$

Aplicando las propiedades de suma, resta y constante:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5x - \lim_{x \rightarrow 2} 4 \\ &= 3(2)^2 + 5(2) - 4 \\ &= 12 + 10 - 4 = 18 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 2: RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIÓN POR FACTORIZACIÓN

Evaluar el límite racional cuando tiende a un punto crítico:

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 - 9) / (x^2 - 5x + 6)]$$

**Paso 1:** Sustitución directa para verificar indeterminación:

- Numerador:  $3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$
- Denominador:  $3^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Se genera una indeterminación del tipo  $0/0$ . Procedemos a factorizar.

**Paso 2:** Factorización (Diferencia de cuadrados y trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ ):

- $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
- $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

Reescribiendo el límite y simplificando los términos comunes:

$$\lim_{x \rightarrow 3} [ ((x - 3)(x + 3)) / ((x - 3)(x - 2)) ]$$

Cancelando el factor común  $(x - 3)$  que generaba la división por cero:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} [ (x + 3) / (x - 2) ]$$

**Paso 3:** Sustitución final:

$$= (3 + 3) / (3 - 2) = 6 / 1 = 6$$

## TEMA 3: LÍMITES LATERALES

Los límites laterales son una herramienta fundamental en el cálculo matemático que nos permite comprender y describir con precisión el comportamiento de una función  $F(x)$  cuando la variable independiente  $x$  se aproxima a un valor específico desde una dirección espacial determinada.

### Definición y Notación Formal

Para dictaminar que el límite general de una función existe en un punto determinado, es obligatorio analizar de manera simétrica:

- Límite por la izquierda:  $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$
- Límite por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$

### ANÁLISIS TÉCNICO: LÍMITES RACIONALES NO DEFINIDOS

Al evaluar  $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 5x + 6) / (x - 2)]$ :

Sustitución directa:  $0/0$ . Factorizando obtenemos  $(x - 3)(x - 2)$ . Al dividir por  $(x - 2)$  se anula la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$$

## TEMA 4: LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor real se aproxima una función cuando la variable tiende a un punto crítico manejando únicamente la magnitud numérica.

**Criterio de Existencia del Límite:** Un límite general en un punto existe si y solo si ambos límites laterales calculados independientemente arrojan exactamente el mismo valor finito:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \leftarrow \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = L$$

## CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

### EVALUACIÓN TEMA 1: CONCEPTO Y PROPIEDADES

1. Un límite describe el valor al que se acerca una función sin necesidad de llegar a tocar ese punto exactamente.  V  F
2. El límite de una constante fija cuando la variable tiende a cualquier punto es igual a cero.  V  F

### EVALUACIÓN - TEMA 2: METODOLOGÍA Y EJERCICIOS

3. El primer paso fundamental para resolver analíticamente cualquier límite es realizar la sustitución directa del valor de tendencia.  V  F
4. Una indeterminación matemática del tipo  $0/0$  significa que el límite no existe y no se puede simplificar por álgebra.  V  F

### EVALUACIÓN - TEMA 3: LÍMITES LATERALES

5. Para analizar un límite por la derecha, se toman valores de la variable que son estrictamente menores al punto de aproximación.  V  F
6. Para que un límite general exista en un punto, es obligatorio que ambos límites laterales sean exactamente iguales.  V  F

#### EVALUACIÓN - TEMA 4: VALOR ABSOLUTO

7. Los límites con valor absoluto miden la distancia pura hacia el cero, por lo que manejan únicamente la magnitud numérica sin importar el signo.

V  F

8. El concepto clave para resolver un límite con valor absoluto consiste en redefinir el operando como una función por partes o a trozos.

V  F