BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

CUADERNILLO DIGITAL DE Matemáticas

Estudiante	Leonardo Machado
Curso	2do BGU "B"
Docente	Lic. Tupak Vallejo
Asignatura	matemáticas
Temas:	Límites, Raíces, Logaritmos e Inducción a la Derivada

LIVEWORKSHEETS

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

En matemáticas, un límite describe el valor al que se acerca una función a medida que la variable independiente (x) se aproxima a un punto determinado, sin necesidad de llegar a tocar ese punto exactamente. Es, básicamente, el estudio detallado de la tendencia de una función cuando sus variables se aproximan a ciertos entornos localizados.

Se expresa formalmente como:

$$Lim_{x \to a} F(x) = L$$

(El límite de la función F(x) cuando x tiende al valor a es igual a L)

Propiedades Principales de los Límites

Estas reglas algebraicas fundamentales operan como herramientas operativas esenciales que permiten simplificar y resolver estructuras de límites complejos de una forma directa y estructurada:

Propiedad	Definición y Expresión Formal
1. Suma y Resta	El límite de una suma o resta es equivalente a la suma o resta de los límites individuales de cada función. $Lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = Lim_{x \to a} f(x) \pm Lim_{x \to a} g(x)$
2. Producto	El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites individuales de dichas funciones. $Lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = Lim_{x \to a} f(x) \cdot Lim_{x \to a} g(x)$
3. Cociente	El límite de una división es la división de los límites de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea diferente de 0. $Lim_{x \to a}[f(x)/g(x)] = [Lim_{x \to a} f(x)] / [Lim_{x \to a} g(x)]$; donde g(x) ≠ 0
4. Constante	El límite de un número fijo (constante K) cuando la variable tiende a cualquier punto es ese mismo número. $Lim_{x \to a} K = K$
5. Multiplicación por Constante	

LIVEWORKSHEETS

Propiedad	Definición y Expresión Formal
	Se pueden extraer los factores numéricos constantes que multiplican a una función fuera del operador del límite. $Lim_{x \to a} [K \cdot f(x)] = K \cdot Lim_{x \to a} f(x)$
6. Potencia y Raíz	El límite de una función elevada a una potencia (o bajo una raíz) es igual a la potencia del límite de dicha función. $Lim_{x \to a} [f(x)]^n = [Lim_{x \to a} f(x)]^n$

LIVEWORKSHEETS

TEMA 2: METODOLOGÍA GENERAL Y EJERCICIOS

Pasos para la Resolución Analítica

1. **Sustitución Directa:** Reemplazar el valor de tendencia original en la variable x de la función.
2. **Detección de Indeterminación:** Evaluar si el resultado arroja una indeterminación matemática (como el tipo 0/0).
3. **Simplificación Algebraica:** Utilizar herramientas de álgebra elemental como la Factorización o la Racionalización para eliminar la indeterminación.
4. **Sustitución Final:** Volver a evaluar el límite sustituyendo de nuevo la variable para obtener el valor numérico definitivo.

EJEMPLO 1: LÍMITES POLINÓMICOS DIRECTOS

Resolver aplicando linealidad y descomposición de propiedades:

$$Lim_{x \to 2} (3x^2 + 5x - 4)$$

Aplicando las propiedades de suma, resta y constante:

$$\begin{aligned} &= Lim_{x \to 2} 3x^2 + Lim_{x \to 2} 5x - Lim_{x \to 2} 4 \\ &= 3(2)^2 + 5(2) - 4 \\ &= 12 + 10 - 4 = 18 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2: RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIÓN POR FACTORIZACIÓN

Evaluar el límite racional cuando tiende a un punto crítico:

$$Lim_{x \to 3} [(x^2 - 9) / (x^2 - 5x + 6)]$$

Paso 1: Sustitución directa para verificar indeterminación:

- Numerador: $3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$
- Denominador: $3^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Se genera una indeterminación del tipo 0/0. Procedemos a factorizar.

Paso 2: Factorización (Diferencia de cuadrados y trinomio de la forma $x^2 + bx + c$):

- $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
- $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

Reescribiendo el límite y simplificando los términos comunes:

LIVEWORKSHEETS

$Lim_{x \to 3} [((x - 3)(x + 3)) / ((x - 3)(x - 2))]$

Cancelando el factor común (x - 3) que generaba la división por cero:

$= Lim_{x \to 3} [(x + 3) / (x - 2)]$

Paso 3: Sustitución final:

$$= (3 + 3) / (3 - 2) = 6 / 1 = 6$$

LIVEWORKSHEETS

TEMA 3: LÍMITES LATERALES

Los límites laterales son una herramienta fundamental en el cálculo matemático que nos permite comprender y describir con precisión el comportamiento de una función F(x) cuando la variable independiente x se aproxima a un valor específico a desde una dirección espacial determinada.

Definición y Notación Formal

Para dictaminar que el límite general de una función existe en un punto determinado, es obligatorio analizar de manera simétrica:

- **Límite por la izquierda:** $Lim_{x \to a^-} F(x)$
- **Límite por la derecha:** $Lim_{x \to a^+} F(x)$

ANÁLISIS TÉCNICO: LÍMITES RACIONALES NO DEFINIDOS

Al evaluar $Lim_{x \to 2} [(x^2 - 5x + 6) / (x - 2)]$:

Sustitución directa: 0/0. Factorizando obtenemos (x - 3)(x - 2). Al dividir por (x - 2) se anula la indeterminación:

$$Lim_{x \to 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$$

TEMA 4: LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor real se aproxima una función cuando la variable tiende a un punto crítico manejando únicamente la magnitud numérica.

Criterio de Existencia del Límite: Un límite general en un punto existe si y solo si ambos límites laterales calculados independientemente arrojan exactamente el mismo valor finito:

$$Lim_{x \to a} F(x) = L \leftarrow Lim_{x \to a^-} F(x) = Lim_{x \to a^+} F(x) = L$$

LIVEWORKSHEETS

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN TEMA 1: CONCEPTO Y PROPIEDADES

1. Un límite describe el valor al que se acerca una función sin necesidad de llegar a tocar ese punto exactamente. () V () F

2. El límite de una constante fija cuando la variable tiende a cualquier punto es igual a cero. () V () F

EVALUACIÓN - TEMA 2: METODOLOGÍA Y EJERCICIOS

3. El primer paso fundamental para resolver analíticamente cualquier límite es realizar la sustitución directa del valor de tendencia. () V () F

4. Una indeterminación matemática del tipo 0/0 significa que el límite no existe y no se puede simplificar por álgebra. () V () F

EVALUACIÓN - TEMA 3: LÍMITES LATERALES

5. Para analizar un límite por la derecha, se toman valores de la variable que son estrictamente menores al punto de aproximación. () V () F

6. Para que un límite general exista en un punto, es obligatorio que ambos límites laterales sean exactamente iguales. () V () F

LIVEWORKSHEETS

EVALUACIÓN - TEMA 4: VALOR ABSOLUTO

7. Los límites con valor absoluto miden la distancia pura hacia el cero, por lo que manejan únicamente la magnitud numérica sin importar el signo. () V () F

8. El concepto clave para resolver un límite con valor absoluto consiste en redefinir el operando como una función por partes o a trozos. () V () F

LIVEWORKSHEETS