



U.E.C.I.B'' MUYU
''KAWSAY''

MATEMATICAS

Tercer trimestre

Nombre: Dilan guaiña
Grado: 2 BGU ''B''
Año lectivo: 2025-2026



Fecha: JUNIO 07

LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO

Sensopercepción

$$\lim_{\text{🍏} \rightarrow -2} \frac{|\text{🍏}^2 - 4|}{\text{🍏} + 2}$$

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor se aproxima una función cuando x tiende a un punto, considerando la magnitud sin importar el signo (distancia al 0). Su concepto clave es definir el valor absoluto como una función a trozos, escribiendo:

$$|x-a| = x-a \text{ si } x \geq a$$

O

$$-(x-a) \text{ si } x < a$$

Definición de valor absoluto

Representa la distancia a 0:

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ si } x < 0$$

Indeterminación

A menudo, estos límites producen formas indeterminadas, por ejemplo: $0/0$ requiriendo analizar los límites laterales.

Límites laterales

Debido a que la definición cambia de signo, se deben calcular los límites por la izquierda ($x \rightarrow a^-$) y por la derecha ($x \rightarrow a^+$).

Existencia de límites

El límite general existe si y solo si los límites laterales son iguales.

Ejemplo:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

1. Límite por la derecha
($x \rightarrow 2^+$)

Si $x > 2$, entonces $|x-2| = x-2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = \boxed{1}$$

2. Límite por la izquierda
($x \rightarrow 2^-$)

Si $x < 2$, entonces $|x-2| = -(x-2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = \boxed{-1}$$

LÍMITES CON RAÍCES

Sensopercepción

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$$

Para resolver límites que involucran raíces, especialmente cuando resultan en una indeterminación 0/0, el método más efectivo es la racionalización.

Concepto clave el conjugado

La idea es eliminar la raíz del numerador o denominador usando la diferencia de cuadrados: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Si tienes: $x-a$ su conjugado será: $x+a$

Pasos para resolver el límite

- Evaluar y sustituir para encontrar la indeterminación.
- Multiplicar por el conjugado.
- Simplificar aplicando la diferencia de cuadrados.
- Cancelar términos.
- Sustituir de nuevo y encontrar el valor final.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \frac{\sqrt{4-2}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1) - 4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

LÍMITES CON LOGARITMOS

Sensopercepción

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln x = 1$$

Los límites con logaritmos son un clásico; su secreto está en dominar sus propiedades y conocer los límites notables.

Propiedades de los logaritmos

Antes de calcular cualquier límite, a menudo tendrás que acomodar la expresión utilizando estas propiedades:

Logaritmo de un producto:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Logaritmo de un cociente:

$$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Logaritmo de una potencia

$$\log_b(x^n) = n \log_b(x)$$

Gráfico y límite de logaritmos

Es fundamental saber cómo se comporta la función logaritmo natural ($\ln(x)$) en sus extremos. El logaritmo solo existe para números mayores que 0:

Cuando x tiende a infinito $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Nota: Crece lentamente, pero va al infinito.

Cuando x tiende a 0 por la derecha $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Nota: Se pega al eje Y y hacia abajo.

Límites notables con logaritmos

Cuando te encuentras con indeterminaciones de tipo: $0/0$ El siguiente paso será aplicar cualquiera de sus propiedades.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = x$$

Pasos

- Calculamos la indeterminación.
- Aplicamos cualquiera de sus propiedades en una función continua.
- Identificamos el valor del límite y resolvemos.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} [\ln(1+x)]}{\frac{d}{dx} [x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+0} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

INDUCCIÓN A LA DERIVADA

Sensopercepción

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\text{🍓}+h) - f(\text{🍓})}{h}$$

La derivada es una herramienta del cálculo que permite medir cómo cambia una función respecto a una variable. Indica la rapidez con la que varía una magnitud en un instante determinado.

Concepto de pendiente

La derivada surge del estudio de la pendiente de una recta tangente a una curva.

- Pendiente positiva: la función crece.
- Pendiente negativa: la función decrece.
- Pendiente cero: la función tiene un punto máximo, mínimo o una parte horizontal.

Razón de cambio

La derivada representa la razón de cambio instantánea de una función.

Ejemplos:

- Velocidad: cambio de posición respecto al tiempo.
- Aceleración: cambio de velocidad respecto al tiempo.
- Crecimiento de una población.

Aplicaciones de la derivada-

- Calcular velocidades y aceleraciones.
- Determinar máximos y mínimos.
- Analizar el crecimiento y decrecimiento de funciones.
- Resolver problemas de optimización.
- Estudiar fenómenos físicos, económicos y biológicos.

Pasos:

- Aplicar la definición de derivada.
- Sustituir $x+h$ en la función.
- Simplificar la expresión obtenida.
- Cancelar términos comunes.
- Evaluar el límite cuando $h \rightarrow 0$
- Obtener la derivada.

Ejemplo:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$! : \frac{d}{dx} (x) = 1 = 1! = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^k) = k!$$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (x^{k+1}) = (k+1)!$$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (x^{k+1}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{dx^k} (x^{k+1}) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx} \left((k+1) x^k \right) \\ &= (k+1) \frac{d}{dx} (x^k) \\ &= (k+1) \left(\frac{d^k}{dx^k} (x^k) \right) \\ &= (k+1) (k!) \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fecha: JUNIO 07

PREGUNTAS

Límites con valor absoluto

1- ¿Qué se debe calcular en una función con valor absoluto?

- a) Los límites laterales.
- b) La derivada.
- c) El logaritmo

2-¿Cuándo existe un límite con valor absoluto?

- a) Cuando los límites laterales son diferentes.
- b) Cuando los límites laterales son iguales.

Límites con raíces

1- ¿Para qué sirve la racionalización en los límites con raíces?

- a) Para eliminar raíces y simplificar la expresión.
- b) Para calcular áreas.
- c) Para obtener derivadas.

2-¿Qué es el conjugado de una expresión con raíz?

- a) Una expresión idéntica.
- b) Una expresión que cambia el signo entre los términos.

Límites con logaritmos

1- ¿Cuál es una propiedad del logaritmo de un producto?

- a) Se suman los logaritmos.
- b) Se multiplican los logaritmos.
- c) Se dividen los logaritmos.

2-¿Qué sucede con los logaritmos en una multiplicación?

- a) Se suman.
- b) Se restan.
- c) Se multiplican.

Inducción a la derivada

1-¿Qué mide la derivada de una función?

- a) Su razón de cambio.
- b) Su área.
- c) Su perímetro.

·2-¿Qué representa la derivada en una gráfica?

- a) La pendiente de la recta tangente.
- b) El eje horizontal.
- c) El origen.