CUADERNILLO DIGITAL

ECMATEMÁTICAS

$y/b = 1$ • $A = \pi r^2$ • $ax^2 + bx + c = 0$ • $y = \cos(x) + 2$

Estudiante: Juan Guailla

Curso: 2do BGU "B"

Docente: Lic. Tupac Vallejo

Asignatura: Matemáticas (Análisis Matemático)

Temas: Límites, Raíces, Logaritmos e Inducción a la Derivada

SENSOPERCEPCIÓN E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

$$Lim_{x \to 🍓} F(🍓) = L$$

Límites

En matemáticas, un límite describe al valor al que se acerca una función a medida que la variable independiente (x) se aproxima a un punto determinado, sin necesidad de llegar a tocar ese punto. Es básicamente el estudio de la tendencia de una función. Se expresa así:

$$lim_{x \to a} f(x) = L$$

(el límite de f de x cuando x tiende de a a a es igual a L).

Propiedades Principales

Estas reglas permiten resolver límites complejos de forma sencilla:

1. Suma y resta

El límite de una suma es la suma de los límites.

$$lim\ [f(x) \pm g(x)] = lim\ f(x) \pm lim\ g(x)$$

2. Producto

El límite de un producto es el producto de los límites.

$$lim\ (f(x) \cdot g(x)) = lim\ f(x) \cdot lim\ g(x) = lim\ f(x)g(x)$$

3. Cociente

El límite de una división es la división de los límites siempre y cuando el denominador no sea 0.

$$lim\ [f(x) / g(x)] \Rightarrow lim = lim\ f(x) / lim\ g(x)$$

4. Constante

El límite de un número fijo es ese mismo número.

$$lim\ K = K$$

5. Multiplicación por constante

Pueden sacar los números que multiplican a la función fuera del límite.

$$\lim [K \cdot f(x)] = K \cdot \lim f(x)$$

6. Potencia y raíz

El límite de una potencia es la potencia del límite.

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

Pasos a Resolver

1. Sustitución directa.
2. Si hay indeterminación, simplificar.
3. Usar: Factorización o racionalización.
4. Sustituir otra vez.

Ejemplos de Propiedades y Límites Directos / Factorización

Ejemplo 1:

$\lim_{x \to 2} (3x^2 + 5x - 4)$

$\lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 5x - \lim_{x \to 2} 4$

$3(2)^2 + 5(2) - 4$

$12 + 10 - 4 = 18$

Ejemplo 2:

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 5)$

$\lim_{x \to 2} x^2 + 3x - 5$

$\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x - \lim_{x \to 2} 5$

$\lim 1(2)^2 + \lim 3(2) - 5$

$4 + 6 - 5 = 5$

Ejemplo 3:

$\lim_{x \to 3} [(x^2 - 9) / (x^2 - 5x + 6)]$

$\lim_{x \to 3} [((3)^2 - 9) / ((3)^2 - 5(3) + 6)] = (9 - 9) / (9 - 15 + 6) = 0 / 0$

$\lim_{x \to 3} [((x - 3)(x + 3)) / ((x - 3)(x - 2))]$

$\lim_{x \to 3} [(x + 3) / (x - 2)] = (3 + 3) / (3 - 2) = 6 / 1 = 6$

Ejemplo 4:

$\lim_{x \to 2} [(x^2 - 5x + 6) / (x - 2)]$

$[((2)^2 - 5(2) + 6) / (2 - 2)] = (4 - 10 + 6) / 0 = 0 / 0$

$\lim_{x \to 2} [((x - 3)(x - 2)) / (x - 2)] = 2 - 3 = -1$

📝 **AUTOEVALUACIÓN: INTRODUCCIÓN Y PROPIEDADES**

Pregunta 1: Para que el límite de una función exista cuando $x \to a$, es estrictamente obligatorio que la función esté definida en el punto $x = a$ y se pueda tocar ese punto. **(Verdadero / Falso)**

Pregunta 2: La propiedad del cociente indica que el límite de una división es igual a la división de los límites de las funciones individuales, sin importar el valor que tome el denominador. **(Verdadero / Falso)**

Límites Laterales

Los límites laterales son una herramienta fundamental en el cálculo para entender el comportamiento de una función $F(x)$ cuando la variable x se aproxima a un valor específico a desde una dirección determinada (ya sea por la izquierda o por la derecha).

Definición y notación

Para que un límite exista en un punto, debemos analizar qué sucede cuando nos acercamos por los 2 lados.

- **Límite por la izquierda:** Se denota con un signo (-) como superíndice. Representa el valor al que se acerca la función cuando tomamos valores de x ligeramente menores a a.
  $\lim_{x \to a^-} f(x)$
- **Límite por la derecha:** Se denota con un signo (+) como superíndice. Representa el valor al que se acerca la función cuando tomamos valores de x ligeramente mayores que a.
  $\lim_{x \to a^+} f(x)$

📝 **AUTOEVALUACIÓN: LÍMITES LATERALES**

Pregunta 1: Si nos aproximamos a un valor crítico por la izquierda mediante valores ligeramente menores a él, la notación correcta utiliza un signo (+) como superíndice. **(Verdadero / Falso)**

Pregunta 2: El análisis de los límites laterales es una herramienta útil y común cuando se trabaja con funciones modeladas por partes (o a trozos). **(Verdadero / Falso)**

Límite con Valor Absoluto

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor se aproxima una función cuando x tiende a un punto, manejando la magnitud sin importar el signo (distancia al cero).

Ejemplo Valor Absoluto:

$\lim_{x \to 3} [|x - 3| / |x - 3|]$

$\lim_{x \to 3} [(x - 3) / (x - 3)] = 0 / 0$

$|x - 3| \Rightarrow \text{si } x \geq 3 \to (x - 3); \text{ si } x < 3 \to -(x - 3)$

$\lim_{x \to 3^+} [(x - 3) / (x - 3)] = (3 - 3) / (3 - 3) = 1$

$\lim_{x \to 3^-} [-(x - 3) / (-x + 3)] \neq 0$

Límites con Raíces

Para resolver límites que involucran raíces especialmente cuando resultan en la indeterminación $0/0$ el método más efectivo es la racionalización usando el conjugado $(\sqrt{x} + a)$.

Ejemplo Racionalización:

$\lim_{x \to 4} [(\sqrt{x} - 2) / (x - 4)]$

$= (\sqrt{4} - 2) / (4 - 4) = 0 / 0$

$\lim_{x \to 4} [(\sqrt{x} - 2) / (x - 4)] \cdot [(\sqrt{x} + 2) / (\sqrt{x} + 2)]$

$\lim_{x \to 4} [1 / (\sqrt{x} + 2)] = 1 / (\sqrt{4} + 2) = 1 / 4$

Límites Logarítmicos Notable Resuelto

Fórmula Base Notable: $\lim_{x \to 0} [\ln(1 + x) / x] = 1$

Resolución del Ejercicio del Cuadernillo:

Problema: $\lim_{x \to 0} [\ln(1 + x) / (\sqrt{x + 4} - 2)] \Rightarrow$ *Indeterminación 0/0*

Racionalizando por el conjugado del denominador:

$= \lim_{x \to 0} [\ln(1 + x) \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)] / [(\sqrt{x + 4})^2 - 2^2]$

$= \lim_{x \to 0} [\ln(1 + x) \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)] / x$

Separando la propiedad notable:

$= \lim_{x \to 0} [\ln(1 + x) / x] \cdot \lim_{x \to 0} [\sqrt{x + 4} + 2]$

$= 1 \cdot (\sqrt{0 + 4} + 2) = 1 \cdot (2 + 2) = 4$

Resultado Final = 4

Investigación Ampliada: Inducción a la Derivada

De la Secante a la Tangente

Para construir el concepto de derivada, se parte de una recta secante que corta a una función en dos puntos: $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$. La pendiente viene dada por el cociente incremental de Newton:

$$m_{sec} = [f(x + h) - f(x)] / h$$

A medida que la variación horizontal h tiende a cero ($h \to 0$), la recta secante se aproxima infinitamente hasta convertirse en la recta tangente en el punto P. Si este límite existe, define formalmente a la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Ejemplo Algebraico: $f(x) = x^2$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} [(x + h)^2 - x^2] / h$

$= \lim_{h \to 0} [x^2 + 2xh + h^2 - x^2] / h$

$= \lim_{h \to 0} [h(2x + h)] / h = 2x$

📝 **AUTOEVALUACIÓN: INDUCCIÓN A LA DERIVADA**

Pregunta 1: Geométricamente, la derivada de una función en un punto específico representa la pendiente de la recta secante que corta a la función en dos puntos distantes. **(Verdadero / Falso)**

Pregunta 2: En la definición formal de la derivada mediante el límite del cociente incremental, la variable h representa la distancia o incremento horizontal, la cual debe tender a cero ($h \to 0$). **(Verdadero / Falso)**