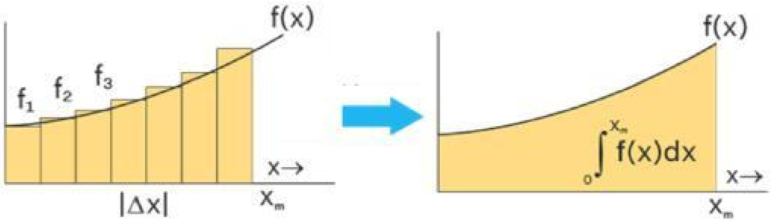
Instrucciones: lee los siguientes planteamientos y después resuelve cada problema eligiendo el alveolo correspondiente en la hoja de respuestas.

1. Para entender mejor el concepto de integral, Santi vio un tutorial en el que apareció la siguiente imagen. ¿Qué idea de la definición de integral se representa en dicha figura?



A. En la gráfica se observa que la integral es el valor de la función evaluado en el extremo inferior del intervalo, menos el valor en el extremo superior.

B. La imagen muestra cómo la integral indefinida representa la pendiente instantánea de una curva en un punto específico, lo que permite calcular razones de cambio de funciones continuas.

C. La imagen representa cómo la integral definida permite calcular el área bajo una curva en un intervalo dado, sumando infinitas áreas de rectángulos infinitesimales.

D. La imagen representa el uso de la integral para encontrar el punto exacto donde una función alcanza su máximo o mínimo dentro de un intervalo dado.

2. Selecciona la opción que complete correctamente la siguiente idea sobre los conceptos básicos del Cálculo Integral:

La primitiva o _______de una función $f(x)$ es otra función, $F(x)$, cuya _____es la función original.

A. derivada – antiderivada
B. antiderivada – integral
C. integral – antiderivada
D. antiderivada – derivada

3. ¿Cuál de los términos de la respuesta de la siguiente integral es incorrecto?

$$\int (16x^3 + 9x^2 + x)dx = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + C$$

A. $4x^4$
B. $3x^3$
C. C
D. $2x^2$

4. ¿Qué fórmula recomendarías para resolver la siguiente integral?

$$\int \frac{2}{x} dx$$

A. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$

B. $\int \frac{u}{v} dv = \frac{vdu - udv}{v^2} + C$

C. $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

D. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{v+a}{v-a}\right| + C$

5. ¿Qué fórmula recomendarías para resolver la siguiente integral?

$$\int \frac{2x}{(x^2-1)^3} dx$$

A. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$

B. $\int \frac{u}{v} dv = \frac{vdu - udv}{v^2} + C$

C. $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

D. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{v+a}{v-a}\right| + C$

6. Selecciona la opción en la que estén correctamente relacionadas las fórmulas que pueden utilizarse para resolver cada integral:

Integral	Fórmula
1. $\int \frac{1}{x} dx$	a) $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{1}{x^3} dx$	b) $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$
3. $\int \frac{1}{x^{-2}} dx$	

A. 1b, 2a, 3b
B. 1a, 2a, 3b
C. 1b, 2a, 3a
D. 1a, 2b, 3b

7. ¿Cuál de las siguientes propiedades de la integral es siempre cierta?

A. $\int (v+a)(v+b)dv = \int (v+a)dv \cdot \int (v+b)dv$

B. $\int (v+a)^b dv = \left[\int (v+a)dv\right]^b$

C. $\int \frac{v+a}{v+b} dv = \frac{\int (v+a)dv}{\int (v+b)dv}$

D. $\int (v+a+b)dv = \int v\, dv + \int a\, dv + \int b\, dv$

8. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int (x+2)(x-6)dx$$

A. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 12x + C$

B. $x^2 - 4x - 12 + C$

C. $\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 12x + C$

D. $\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right)\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 6x\right) + C$

9. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int (12x^5 + 10x^4 - 3x^{-2})dx$$

A. $2x^6 + 2x^5 - \dfrac{3}{x^3} + C$

B. $12x^6 + 10x^5 + \dfrac{3}{x} + C$

C. $2x^6 + 2x^5 + \dfrac{3}{x} + C$

D. $2x^6 + 2x^5 + \dfrac{1}{x^3} + C$

10. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int \sqrt{x+9}\,dx$$

A. $\dfrac{3}{2}\sqrt{(x+9)^3} + C$

B. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+9)^3} + C$

C. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{(x+9)^2} + C$

D. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+9)^2} + C$

11. Para que la siguiente integral esté correctamente resuelta, ¿qué valores deben escribirse en los espacios en blanco?

$$\int 15e^{3x}dx = \square e^{\square} + C$$

A. $5,\ 3x$
B. $15,\ 3x$
C. $5,\ 4x$
D. $15,\ 4x$

12. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int -\cos(2\theta)\,d\theta$$

A. $2\,\mathrm{sen}(2\theta) + C$

B. $-2\,\mathrm{sen}(2\theta) + C$

C. $\dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta) + C$

D. $-\dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta) + C$

13. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int (x^4 + 2e^{-x} - \tan x)\, dx$$

A. $\frac{1}{5}x^5 - 2e^{-x} - \sec^2 x + C$

B. $\frac{1}{5}x^5 - 2e^{-x} + \ln|\cos x| + C$

C. $\frac{1}{5}x^5 + 2e^{-x} + \sec^2 x + C$

D. $\frac{1}{5}x^5 + 2e^{-x} - \ln|\cos x| + C$

14. Para resolver la siguiente integral, es necesario completar el diferencial. Selecciona la opción en la que el diferencial haya sido completado de forma correcta.

$$\int x^2 \sqrt[3]{x^3+8}\, dx$$

A. $\frac{1}{3}\int (3)x^2 \sqrt[3]{x^3+8}\, dx$

B. $8\int \left(\frac{1}{8}\right)x^2 \sqrt[3]{x^3+8}\, dx$

C. $\frac{3}{8}\int \left(\frac{8}{3}\right)x^2 \sqrt[3]{x^3+8}\, dx$

D. $\frac{8}{3}\int \left(\frac{3}{8}\right)x^2 \sqrt[3]{x^3+8}\, dx$

15. Se tiene la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2\,\mathrm{sen}\,x$. Selecciona la opción que representa correctamente la primitiva de $f'(x)$.

A. $f(x) = x^3 + 2\,\mathrm{sen}\,x + C$
B. $f(x) = x^3 + 2\cos x + C$
C. $f(x) = x^2 + 2x\cos x + C$
D. $f(x) = x^3 - 2\cos x + C$

16. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)^4}\, dx$$

A. $-\frac{2}{3(x^2+1)^3} + C$

B. $-\frac{2}{5(x^2+1)^5} + C$

C. $-\frac{2}{3(x^2+1)} + C$

D. $-\frac{4}{3(x^2+1)^3} + C$

17. Tomando en cuenta el modelo de integración por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v du$$

¿Cuál es la selección más adecuada de "u" y "dv" a fin de aplicar correctamente el método de integración por partes al resolver la siguiente integral?

$$\int x^5 e^{2x}\, dx$$

A. $u = x^5,\ dv = e^{2x}dx$
B. $u = e^{2x},\ dv = x^5 dx$
C. $u = x^5 e^{2x},\ dv = dx$
D. $u = x^2,\ dv = e^{5x}dx$

18. Se desea resolver la siguiente integral utilizando la técnica de sustitución algebraica o cambio de variable:

$$\int x^2(x+9)^6 dx$$

Con el siguiente cambio de variable:

$$u = x + 9$$

Selecciona la opción en la que se muestra la integral reescrita, en términos de la variable "u".

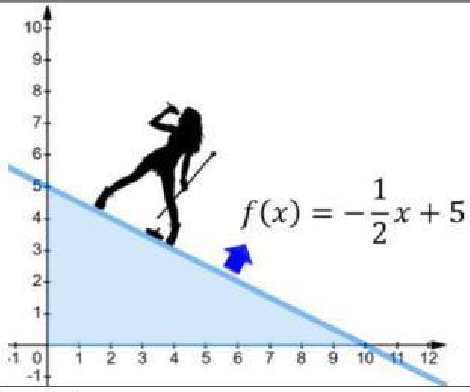
A. $\int u^2(u+9)^6 du$
C. $\int u^6(u+9)^2 du$
B. $\int u^6(u-9)^2 du$
D. $\int u^2(u-9)^6 du$

19. ¿Qué técnica de integración sirve para resolver la siguiente integral y cuál es su resultado?

$$\int x \cos x\, dx$$

A. Técnica de integración por partes; resultado: $x\cos x - \operatorname{sen} x + C$
B. Técnica de integración por partes; resultado: $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$
C. Técnica de sustitución algebraica; resultado: $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$
D. Técnica de sustitución algebraica; resultado: $x\cos x - \operatorname{sen} x + C$

20. El equipo de colaboradores de Lina Pop, una famosa cantante e *influencer*, está diseñando su nuevo escenario para una gira de conciertos. Una parte del escenario tiene una rampa inclinada por la que Lina baja mientras canta su gran éxito "¡Derivando tu corazón!". El diseño de la rampa se basa en la función que se muestra en la imagen de la derecha. Tomando en cuenta esta gráfica, ¿cuál de las siguientes integrales definidas sirve para calcular el área sombreada, misma que corresponde a la superficie visible de la rampa?



A. $\int_5^{10} \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$

B. $\int_0^{5} \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$

C. $\int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$

D. $\int_{-1/2}^{5} \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$

21. Valeria está programando un nuevo videojuego de carreras llamado *Sky Riders*, donde los jugadores vuelan sobre tres pistas flotantes con forma de curvas. Las pistas están descritas por funciones matemáticas definidas en intervalos cerrados y Valeria necesita saber cuánto espacio ocupa cada pista. Toma en cuenta la información de la siguiente tabla:

Pista	Función	Intervalo
Nébula	$f(x) = -x^2 + 4$	$[-1,1]$
Vórtex	$f(x) = -0.8x^4 + 3x^2$	$[-2,2]$
Solar Dive	$f(x) = 3 - x^2$	$[-1,1]$

Valeria quiere saber cuál pista tiene más área bajo la curva (es decir, cuál cubre más espacio visual en pantalla). Selecciona la opción en la que se presenten las pistas de menor a mayor área bajo la curva en sus respectivos intervalos.

A. Nébula, Solar Dive, Vórtex
B. Solar Dive, Nébula, Vórtex
C. Solar Dive, Vórtex, Nébula
D. Nébula, Vórtex, Solar Dive

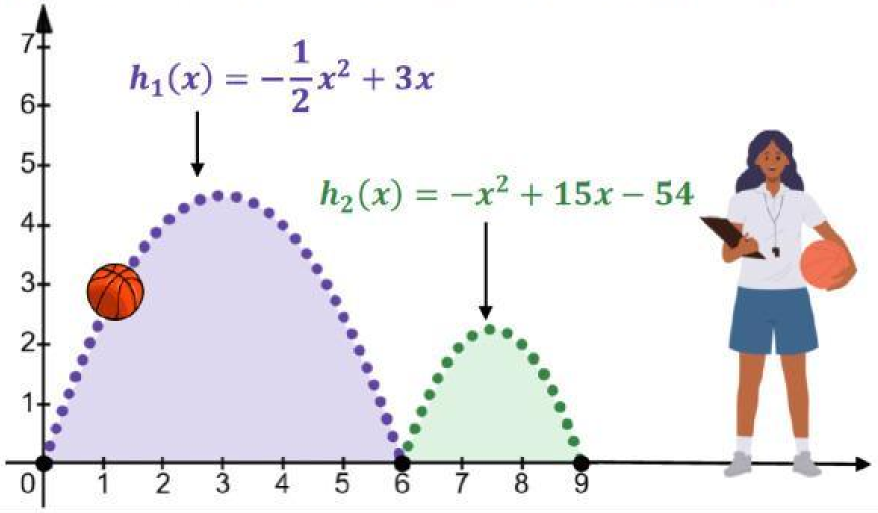
22. En una fábrica de jugo de mango se tiene un tanque de almacenamiento al que se le transfiere el jugo producido a una velocidad que varía con el tiempo, de acuerdo con la siguiente función, donde t es el tiempo, en minutos, y $Q(t)$ es el flujo de jugo de mango que llega al tanque, en litros/minuto:

$$Q(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$$

El tanque se llena durante los primeros 4 minutos de operación. Si el área bajo la curva de la función de flujo representa el volumen total, ¿cuántos litros de jugo se han vertido en el tanque en ese intervalo de tiempo?

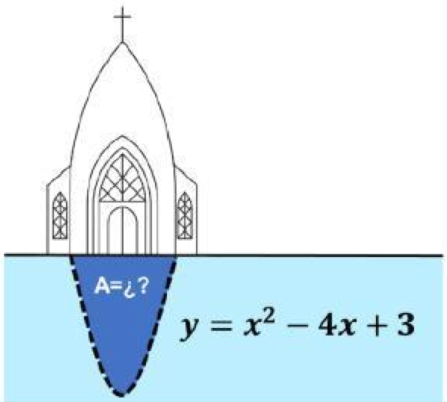
A. 88 litros
B. 24 litros
C. 53 litros
D. 360 litros

23. Sofía es *coach* de basquetbol y está utilizando un sistema computacional para analizar la energía consumida en cada rebote de un balón. Para iniciar su estudio, dejó caer un balón que rebotó dos veces en el suelo, siguiendo la trayectoria mostrada en la gráfica. Cada rebote se modela con una función distinta, donde "x" representa la distancia horizontal (en metros) desde el inicio del rebote y "$h(x)$" es la altura del balón en cada punto. Sofía desea calcular el área bajo la curva de ambos rebotes, ya que esta área es una medida de la energía que conserva la pelota durante su trayectoria. ¿Cuánto mayor es el área bajo la curva del primer rebote en comparación con la del segundo?



A. 22.5 m^2
B. 18 m^2
C. 4.5 m^2
D. 13.5 m^2

24. A cierta hora de la tarde, una iglesia ubicada a orillas de un lago proyecta un reflejo con forma parabólica sobre la superficie del agua. El contorno de este reflejo puede modelarse mediante la función cuadrática mostrada en la figura. Determina el área del reflejo de la iglesia en el lago utilizando como límites de integración los puntos donde la parábola interseca al eje horizontal.



A. 4.33 u^2
B. 1 u^2
C. 1.33 u^2
D. 2.66 u^2

25. En un estudio farmacológico se analiza la efectividad del Zefralín, un nuevo medicamento desarrollado para el tratamiento de la migraña. La concentración del fármaco en el organismo se monitorea a lo largo del tiempo y se modela mediante las siguientes funciones:

- La función $g(t) = -t^2 + 4$, que representa el intervalo de concentración segura del medicamento en la sangre.
- La función $f(t) = t^2$, que representa la concentración que realmente se alcanza en el organismo después de la administración.

Ambas funciones están dadas en términos del tiempo (t), en horas, mientras que las variables de respuesta $g(t)$ y $f(t)$ están dadas en unidades de concentración (mg/L). El área comprendida entre ambas curvas, para $t \geq 0$, indica el margen de seguridad dentro del cual el Zefralín actúa efectivamente sin causar efectos adversos. ¿Cuántas unidades mide el área que representa el margen de seguridad del fármaco durante el tratamiento? Toma en cuenta que el área de interés es la que corresponde al dominio positivo del tiempo, ya que no existen tiempos negativos.

A. 15.08
B. 3.77
C. 5.33
D. 7.54