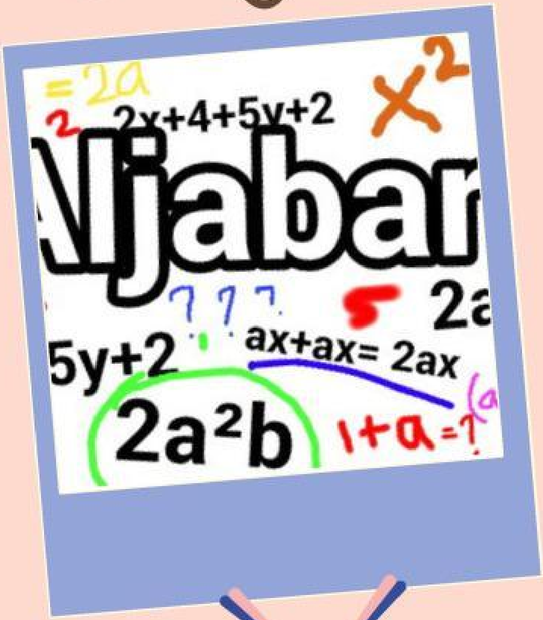

LEMBAR KERJA MAHASISWA

SUBRING

SUB CPMK0622

Mampu membuktikan suatu ideal dari ring dengan menggunakan pemikiran logis, kritis dan sistematis

INDIKATOR

Mahasiswa mampu menggunakan pemikiran logis dan sistematis dalam:

1. Menjelaskan definisi subring
2. Membuat contoh subring suatu ring
3. Membuktikan suatu subring
4. Menyelesaikan masalah subring

PETUNJUK PENGERJAAN

1. Bacalah materi dan simaklah video pembelajaran sebelum menyelesaikan tugas
2. Selesaikan tugas dengan baik sesuai dengan langkah kegiatan yang diberikan
3. Gunakan sumber pembelajaran lain yang dapat membantu kalian memahami konsep yang dipelajari
4. Waktu pengerjaan 90 menit

NAMA /NIM :

....

....

....

....

....

MATERI

Pada pertemuan ini kalian akan mempelajari tentang Subring, Pembentukan subring mempunyai kesamaan dengan pembentukan subgrup yang telah dibahas pada teori grup. Konsep subring penting untuk dipelajari sebagai dasar konsep-konsep selanjutnya

PERHATIKAN VIDEO PEMBELAJARAN BERIKUT!

YouTube

PELAJARILAH MATERI PEMBELAJARAN BERIKUT!

PDF

Setelah mempelajari materi di atas, selesaikan permasalahan-permasalahan berikut!

Jelaskan kembali definisi dari subring sesuai dengan pemahaman kalian

Pilihlah dan letakkan syarat-syarat S subring dari ring R pada kotak sebelah kiri, kemudian jelaskan maknanya

$S \subseteq R$

$S \neq \emptyset$

$xy = yx, \forall x, y \in S$

$x - y \in S, \ \forall x, y \in S$

$xy \in S, \forall x, y \in S$

$(xy)z = x(yz), \forall x, y \in S$

$\forall x \in S, r \in R \Rightarrow xr, rx \in S$

Penjelasan →

KETERANGAN NOTASI

$\subseteq$: Himpunan bagian

$\in$: Anggota himpunan

$\neq$: Tidak sama dengan

$\forall$: Untuk setiap

$\emptyset$: Himpunan kosong

YA ATAU TIDAK?

Perhatikan pernyataan berikut!
Beri tanda centang untuk pernyataan yang bernilai benar!

- ◯ 5Z adalah subring dari Q
- ◯ {0,3, 6, 9} subring dari 3Z
- ◯ $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$ subring dari $M_2(R)$
- ◯ {0} subring dari 4Z
- ◯ $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ subring dari $M_2(R)$
- ◯ {0, 5, 10} subring dari Z_{15}
- ◯ 4Z subring dari 2Z
- ◯ {1, -1, i, -i} subring dari C

Catatan

$$nZ = \{nx | x \in Z\}$$

$$Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

$$C = \{a + bi | a, b \in R\}$$

1. Tuliskan semua subring dari Z_{18}
2. Buatlah contoh subring dari $2Z$

PEMBUKTIAN SUBRING

Misalkan M himpunan semua matriks berordo 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat dan

S himpunan semua matriks berordo 2×2 yang berbentuk $\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ dengan entri-entri bilangan bulat.

Buktikan bahwa S subring dari M!

Diketahui:

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in Z \right\}$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \middle| p, q \in Z \right\}$, syarat keanggotaan S adalah $s_{12} = s_{22} = 0$ dan semua entri bilangan bulat

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian matriks biasa.

Akan dibuktikan: S subring dari M
Untuk membuktikan pernyataan ini ingat kembali syarat-syarat subring yaitu:

1. $S \subseteq M$ artinya $\forall\, x \in S \implies x \in M$
2. $S \neq \emptyset$, S bukan himpunan kosong
3. $\forall x, y \in S, x - y \in S$
4. $\forall x, y \in S, \ldots \in S$

Bukti 1
Untuk membuktikan S himpunan bagian M maka
Ambil sebarang $x \in S$. Kemudian perhatikan kembali anggota himpunan S dari definisi di atas
Misalkan $x = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix}$, yang memiliki syarat keanggotaan $p, q, \ldots \in Z$
maka berdasarkan syarat keanggotaan M maka
$x = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix} \in M$
Jadi terbukti bahwa $S \subseteq M$

Bukti 2
Untuk membuktikan $S \neq \emptyset$, ambil identitas operasi pertama di ring M yaitu: $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Kemudian akan ditunjukkan $e \in S$, dengan kata lain harus dibuktikan e memenuhi syarat keanggotaan S
Karena $e_{12} = e_{22} = \cdots$ dan $0 \in Z$ maka terbukti memenuhi syarat keanggotaan S
Jadi
$e \in S$ sehingga $S \neq \emptyset$,

PEMBUKTIAN SUBRING

Bukti 3

Untuk membuktikan $\forall x, y \in S, x - y \in S$, maka

Ambil sebarang $x, y \in S$ maka berdasarkan definisi himpunan S dapat dimisalkan

$x = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix}$, $\quad p, q \in Z$

$y = \begin{pmatrix} r & \cdots \\ s & \ldots \end{pmatrix}$, $\quad \cdots, \cdots \in \cdots$

$x - y = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & \cdots \\ s & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - r & \cdots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

Selanjutnya untuk menunjukkan $x - y \in S$ maka harus dibuktikan $x - y$ memenuhi syarat keanggotaan himpunan S,

Karena $(x - y)_{12} = (x - y)_{22} = \cdots$ dan $p, q, r, s \in Z$ maka $p - r, \ldots \in Z$

Hal tersebut menunjukkan terpenuhinya syarat keanggotaan S.

Jadi terbukti bahwa $x - y \in S$

Bukti 4

Untuk membuktikan $\forall x, y \in S, \ldots \in S$, gunakan cara analog dengan bukti 3 di atas

Ambil sebarang $x, y \in S$ maka berdasarkan definisi himpunan S dapat dimisalkan

$x = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix}$, $\quad p, q \in Z$

$y = \begin{pmatrix} r & \cdots \\ s & \ldots \end{pmatrix}$, $\quad \cdots, \cdots \in \cdots$

$xy = \begin{pmatrix} p & \cdots \\ q & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & \cdots \\ s & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

Selanjutnya untuk menunjukkan $xy \in S$ maka harus dibuktikan xy memenuhi syarat keanggotaan himpunan S,

Karena $(xy)_{12} = (xy)_{22} = \cdots$ dan $p, q, r, s \in Z$ maka $\ldots, \ldots \in Z$

Hal tersebut menunjukkan terpenuhinya syarat keanggotaan S.

Jadi terbukti bahwa $xy \in S$

Oleh karena itu S **subring** M

Pembuktian Bukan Subring

Misalkan A = Z × Z × Z dan S = $\{(a,b,c) | a+b=c \ , a,b,c \in Z\}$
Buktikan bahwa S subring dari A atau tidak!

Diketahui:
A = Z × Z × Z, pertama-tama definisikan terlebih dahulu himpunan A ini
A = Z × Z × Z = $\{(a,b,c) | a,b,c \ \in Z\}$
S = $\{(a,b,c) | a+b=c \ , a,b,c \in Z\}$
Operasi pada himpunan A didefinisikan

$$(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$$
$$(a,b,c)(d,e,f)=(ad,be,cf)$$

$\forall (a,b,c),(d,e,f) \in A$
Akan dibuktikan: S subring dari A
Untuk membuktikan pernyataan ini ingat kembali syarat-syarat subring yaitu:

1. $S \subseteq A$ artinya $\forall\, x \in S \implies x \ \in A$
2. $S \neq \emptyset$, S bukan himpunan kosong
3. $\forall x,y \in S, \ldots \ \in S$
4. $\forall x,y \in S, \ldots \in S$

Bukti 1
Untuk membuktikan S himpunan bagian A, maka
Ambil sebarang $x \in S$. Kemudian perhatikan kembali anggota himpunan S dari definisi di atas
Misalkan $x = (a, \ldots, \ldots)$, yang memiliki syarat keanggotaan $a + \cdots = \cdots \ \ , a, \ldots, \ldots \in Z$
Karena $a, \ldots, \ldots \in Z$ maka berdasarkan syarat keanggotaan A maka
$x = (a, \ldots, \ldots) \ \in A$
Jadi terbukti bahwa $S \ \subseteq A$

Bukti 2
Untuk membuktikan $S \ \neq \emptyset$, ambil identitas operasi pertama di ring A yaitu: $e = (0,0,0)$
Kemudian akan ditunjukkan $e \in S$, dengan kata lain harus dibuktikan e memenuhi syarat keanggotaan S
Karena $e = (\ldots, \ldots, \ldots)$ dan ... + ... = ... maka terbukti memenuhi syarat keanggotaan S
Jadi
$e \in S$ sehingga $S \ \neq \emptyset$,

Bukti 3
Untuk membuktikan $\forall x,y \ \in S, \ldots \in S$, maka
Ambil sebarang $x,y \ \in S$ maka berdasarkan definisi himpunan S dapat dimisalkan
$x = (a, \ldots, \ldots), a+b=c, a,b,c \ \in Z$
$y = (d,e,f), \cdots + \cdots = \cdots , \qquad \cdots, \cdots, \cdots \ \in \cdots$
$x - y = (a, \ldots, \ldots) - (d, \ldots, \ldots) = (a-d, \ldots, \ldots)$
Selanjutnya untuk menunjukkan $x - y \ \in S$ maka harus dibuktikan $x - y$ memenuhi syarat keanggotaan himpunan S,
$x - y = (a-d, \ldots, \ldots)$, di lain pihak $a - d + \cdots = (a + \cdots) - (\cdots + \cdots) = (c - \cdots)$
Hal tersebut menunjukkan terpenuhinya syarat keanggotaan S.
Jadi terbukti bahwa $x - y \ \in S$

Pembuktian Bukan Subring

Bukti 4

Ambil contoh penyangkal $x, y \in S$

$x = (1, 4, 5),\quad \cdots + \cdots = \cdots ,\quad \cdots , \cdots , \cdots \in \cdots$

$y = (-1, -2, -3),\quad \cdots + \cdots = \cdots ,\quad \cdots , \cdots , \cdots \in \cdots$

$xy = (\ldots , \ldots , \ldots)(\ldots , \ldots , \ldots) = (-1, \ldots , -15)$

Karena -1 + … ≠ -15

Jadi terbukti bahwa $xy \notin S$

Oleh karena itu S **bukan subring** A

Generalisasi

Berdasarkan hasil dari dua pembuktian di atas, coba jelaskan bagaimana cara membuktikan subset, himpunan tidak kosong dan sifat tertutup

ALASAN

Jelaskan alasan dari simpulan kalian di atas!
