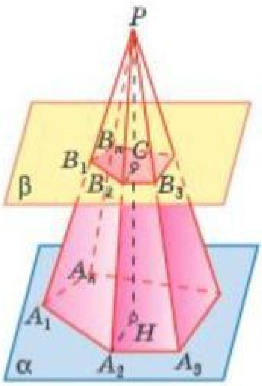
Возьмём произвольную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра в точках B1, B2, ..., B_n(рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 ... A_n$ и $B_1B_2 ... B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется усечённой пирамидой. Отрезки $A_1 B_1$, A_2B_2, ..., A_nB_n называются боковыми рёбрами усечённой пирамиды. Усечённую пирамиду с основаниями $A_1A_2 ... An$ и $B_1B_2 ... B_n$ обозначают так: $A_1A_2 ... A_nB_1B_2 ... B_n$.

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой усечённой пирамиды. На рисунке 83 отрезок CH является высотой усечённой пирамиды. Докажем, что боковые грани усечённой пирамиды — трапеции. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции. Усечённая пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются апофемами. Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полу-суммы периметров оснований на апофему.



Усечённая пирамида

Рис. 83

Таким образом,

1. Нижнее основание – это исходное основание полной пирамиды.
2. Верхнее основание – это многоугольник, полученный в сечении. Он многоугольнику, лежащему в нижнем основании.
3. Основания – правильные многоугольники.
4. $S_{бок} = \frac{P1+P2}{2}*$

Задача 1. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Дано:

$ABCDK$ – пирамида

$ABCD$ – параллелограмм

$AB = 5$ м., $BC = 4$ м.

$BD = 3$ м.

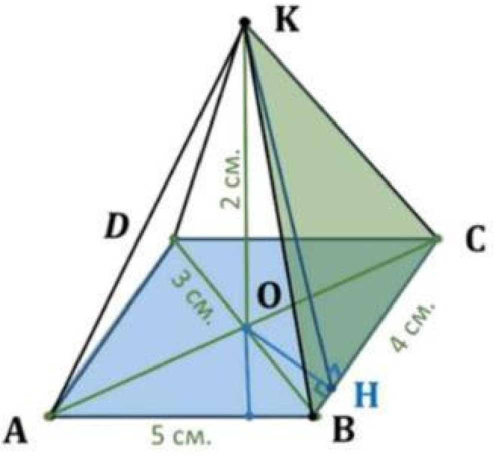
$OK \perp ABCD$

$OK = 2$ м.

Найти:

$S_{\text{полная}} = ?$

Решение:



По условию треугольник CBD – прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора) => S_{OBC} = 0,5*OB*BC = 0,25*DB*BC = 3м^2 =>

По свойству параллелограмма S_{AOD}= S_{ABCD}/4 = 3м^2 => S_{ABCD}= 12 м^2.

S_{OBC}= 0,5*OH*BC = 3 м^2 => OH = 1,5 м.

По построению треугольник KOH – прямоугольный.

По теореме Пифагора из треугольника HOKнаходим HK:

HK = $\sqrt{\mathrm{OK}^{\wedge}2 + \mathrm{OH}^{\wedge}2}$ = $\sqrt{4 + 2{,}25}$ = $\sqrt{6{,}25}$ = 2,5 м.

По теореме о трёх перпендикулярах KH $\perp \mathrm{BC} =>$

⇨ S_{KBC} = 0,5*KH*BC = 2,5*2 = 5 м^2 => S_{KAD} = 5 м^2.

По аналогии найдём KAB

S_{OAB} = 0,5*h_{AOB}*AB = 3м^2 => h_{AOB} = 1,2 м.

По теореме Пифагора h_{AKB} :

h_{AKB} = $\sqrt{OK^2 + h_{AOB}^2}$ = $\sqrt{4 + 1{,}44}$ = $\sqrt{5{,}44}$ м. Теореме о трёх перпендикулярах $h_{AKB} \perp \mathrm{AB} =>$

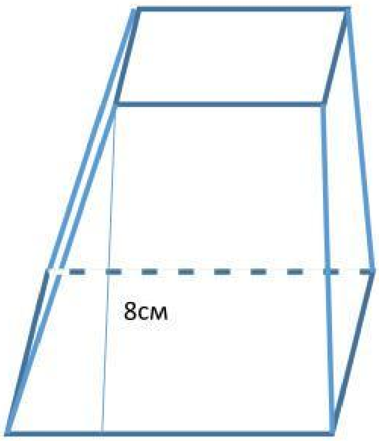
⇨ S_{KAB} = 0,5*h_{AKB}*AB = $\sqrt{5{,}44}$ *2,5 = $\sqrt{34}$ м^2 => S_{KCD} = м^2.

$S_{\text{полная}}$= $S_{\text{боковая}}$ + $S_{\text{основания}}$ = S_{KAB} + S_{KBC} + S_{KCD} + S_{KDA} + S_{ABCD} = 5+5+$\sqrt{34}$ + $\sqrt{34}$ + 12 = (22 + 2*$\sqrt{34}$)м^2.

Ответ: (22 + 2*$\sqrt{34}$)м^2.

Задание 2. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде стороны оснований равны 5см и 3 см, а апофема равняется 8 см. Найдите площадь полной поверхности усечённой пирамиды.

Решение: $S_{полн}$ =



$S_1 = 5*5 = 25$ см^2.

$S_2 = 3*3 = 9$см^2.

$S_{бок} = 0{,}5*(3*4 + 5*4)*$ = 128 см^2.

$S_{полн} = 25+9+128 = 162$см^2.

Ответ: 162 см^2.

Задание 3. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде, площадь поверхности которой равна 380 м^2 известны стороны оснований – 10 м и 4 м. Найти апофему.

Проверь себя!

Какая из формул подходит для подсчёта площади поверхности усечённой пирамиды:

А) $S = S_1 + S_2 + (P_1+P_2)l/2$

Б) $S = S_1*S_2*S_{бок}$

В) $S = S_{осн}*h/2$

Домашнее задание.

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5.
Боковое ребро = $\sqrt{17}$.
Найти площадь полной поверхности.