



LKPD

Lembar Kerja
Peserta Didik

MATEMATIKA KELAS XII

Nama: _____

Kelas: _____

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

Matematika Kelas XII

Judul Materi

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

Tujuan Pembelajaran

Murid mampu membuktikan rumus rumus dasar turunan fungsi trigonometri dan menggunakan prinsip atau aturan aturan turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

Petunjuk Pengerjaan

- Silahkan isi identitas pada halaman pertama.
- Simak soal dan jawab sesuai petunjuk.
- Kerjakan secara individu.
- Jika sudah selesai, cek ulang jawaban dan pastikan sudah mengerjakan semua soal.
- Klik finish untuk mengakhiri kuis.

Aktivitas 1

Pemahaman Konsep

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

Definisi Diferensial/Turunan

Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “ f aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Terdapat beberapa notasi turunan pertama, yaitu

$$f'(x) = y' = \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f(x)$$

Dimana:

$f'(x) = y'$ diperkenalkan oleh Joseph Lois Lagrange

$\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Gottfried Leibniz

D dan $\frac{d}{dx}$ merupakan operator turunan

Aktivitas 2

Pembuktian Rumus

Pembuktian Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

Dengan menggunakan definisi turunan kita akan membuktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri. Sebelum menentukan turunan pertama trigonometri, kita harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri

Mengingat Kembali

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{1}{2}(ax)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x}{x}$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{2}x$
 $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(0)$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Aktivitas 2

Pembuktian Rumus

Pembuktian Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

Contoh 1

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \sin x \text{)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x}{h} && \text{(sin}(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \text{)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x(1 - \cos h)}{h} && \text{(sifat distributif)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos h)}{h} && \text{(sifat limit)} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)}{h} && \text{(sifat limit)} \\ &= \cos x(1) - \sin x(0) && \text{(rumus limit)} \end{aligned}$$

Aktivitas 2

Pembuktian Rumus

Latihan 1

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. Substitusi fungsi $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \dots}{h}$$

2. Gunakan identitas trigonometri $\tan(x+y)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\dots + \dots}{\dots} - \tan x \right)$$

3. Samakan penyebutnya:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(\tan x + \tan h) - \tan x (1 - \dots)}{1 - \dots} \right)$$

4. Lakukan penyederhanaan pada pembilang:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x + \tan^2 x \tan h}{1 - \dots} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h (1 + \dots)}{h (1 - \tan x \tan h)}$$

5. Gunakan sifat limit:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \dots) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - \tan x \tan h)}$$

6. Hasil akhir:

$$f'(x) = (1) \cdot (1 + \tan^2 x) \cdot \dots$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Karena $1 + \tan^2 x = \dots$, maka terbukti $f'(x) = \dots$

Lengkapilah titik-titik pada penyelesaian soal!

Aktivitas 3

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Berdasarkan pembuktian sebelumnya, kita dapat melihat bahwa menentukan turunan menggunakan definisi limit memerlukan proses yang cukup panjang dan memakan waktu. Oleh karena itu, untuk mempermudah penyelesaian masalah yang lebih kompleks, kita akan menggunakan rumus-rumus turunan yang telah kita pelajari dasarnya pada kelas XI.

Petunjuk: Pasangkan fungsi di bawah ini dengan hasil turunannya yang benar!

$$f(x) = k$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = kx^n$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \cot x$$

$$f(x) = \sec x$$

$$f(x) = \csc x$$

$$f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$

$$f'(x) = 1$$

$$f'(x) = -\csc x \cot x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

Aktivitas 3

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Penguatan Konsep Aturan Jumlah, Selisih, dan Perkalian dengan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan diturunkan, maka kita dapat menggunakan prinsip berikut untuk menyelesaikan fungsi yang lebih kompleks secara efisien.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= k u & \Rightarrow f'(x) &= k u' \\ \triangleright f(x) &= u + v & \Rightarrow f'(x) &= u' + v' \\ \triangleright f(x) &= u - v & \Rightarrow f'(x) &= u' - v' \\ \triangleright f(x) &= u \cdot v & \Rightarrow f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ \triangleright f(x) &= \frac{u}{v} & \Rightarrow f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = 2 \tan x + 4x$

b. $f(x) = x^3 \sin x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 2 \tan x + 4x$

Pilih: $u = 2 \tan x \Rightarrow u' = 2 \sec^2 x$

$$v = 4x \quad \Rightarrow v' = 4$$

Maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' + v' \\ &= 2 \sec^2 x + 4 \end{aligned}$$

b. $f(x) = x^3 \cos x$

Pilih: $u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$

$$v = \cos x \quad \Rightarrow v' = -\sin x$$

Maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) \\ &= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x \end{aligned}$$

Aktivitas 3

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Latihan 2

Untuk soal geser jawaban yang sesuai untuk pilihan jawaban yang telah ditentukan pada kotak putih ke kotak warna biru.

$$\triangleright f(x) = x^3 \tan x$$

$$\triangleright f(x) = \sin x \cos x$$

$$\triangleright f(x) = 3x \sin x + \cos x$$

$$\triangleright f(x) = 2x \cos x - x^3$$

$$\triangleright f(x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f'(x) = 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x$$

$$f'(x) = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5 \sin x - 1}{(5 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = 2 \cos x - 2x \sin x - 3x^2$$

$$f'(x) = 2 \sin x + 3x \cos x$$

Aktivitas 3

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Latihan 3

Tentukan nilai turunan pertama dari fungsi berikut

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$$

Tuliskan pengerjaan soal pada buku, foto dan simpan disini!

Dari hasil turunan fungsi diatas, tentukan nilainya jika $x = \frac{\pi}{3}$

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) =$$

Tuliskan pengerjaan soal pada buku, foto dan simpan disini!

Dari hasil turunan fungsi diatas, tentukan nilainya jika $x = \frac{\pi}{3}$