MAKALAH ANALISA VARIABEL KOMPLEKS

LIMIT, TEOREMA PADA LIMIT,

LIMIT DALAM TITIK BATAS, DAN KEKONTINUAN

Makalah ini disusun untuk memenuhi tugas mata kuliah Analisa Variabel Kompleks

Dosen Pengampu:

Dr. Frenza Fairuz Firmansyah, S.Pd., M.Pd.

Saddam Hussen, S.Pd., M.Pd.

Disusun Oleh:

Kelompok 5

Try Novian Karlinabila	240210101007
Rika Dwi Agustin	240210101012
Bintang Afra Kirania	240210101155
Frenina Amanda	240210101160

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2026

KATA PENGANTAR

Puji Syukur senantiasa kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena dengan rahmat, karunia, taufik, dan nikmat sehat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas makalah yang berjudul "Limit, Teorema pada Limit, Limit dalam Titik Batas, dan Kekontinuan" ini dengan tepat waktu. Makalah ini kami susun guna untuk memenuhi salah satu tugas mata kuliah Analisa Variabel Kompleks. Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan saran atas penyusunan makalah ini:

1. Bapak Dr. Frenza Fairuz Firmansyah, S.Pd., M.Pd. dan Bapak Saddam Hussen, S.Pd., M.Pd. selaku dosen pengampu mata kuliah Analisa Variabel Kompleks.
2. Semua rekan sekelas pada program studi Pendidikan Matematika Universitas Jember dan pihak-pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu persatu.

Dalam penulisan makalah ini kami berharap makalah ini dapat berguna untuk menambah pengetahuan kita semua mengenai Limit, Teorema pada Limit, Limit dalam Titik Batas, dan Kekontinuan. Kami menyadari di dalam tugas ini masih terdapat banyak kekurangan baik pada penulisan maupun isi materi. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat kami harapkan untuk memperbaiki dan menyempurnakan tugas makalah ini. Bila ada kesalahan kami mohon maaf yang sebesar-besarnya. Semoga makalah ini dapat berguna dengan baik bagi penulis dan semua pihak.

Jember, 4 Maret 2026

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis variabel kompleks merupakan salah satu cabang penting dalam matematika yang mempelajari fungsi-fungsi dengan variabel bilangan kompleks serta sifat-sifatnya pada bidang kompleks. Dalam mempelajari analisis variabel kompleks, pembahasan mengenai limit fungsi kompleks menjadi salah satu konsep dasar yang sangat penting. Pembahasan mengenai limit membantu memahami bagaimana perilaku suatu fungsi ketika variabelnya mendekati suatu titik tertentu pada bidang kompleks.

Selain itu, dalam analisis variabel kompleks juga terdapat berbagai teorema yang berkaitan dengan limit. Teorema tersebut dapat menentukan sifat-sifat limit suatu fungsi serta bagaimana operasi-operasi matematika tertentu memengaruhi nilai limit yang dihasilkan. Pembahasan lain yang juga penting adalah limit dalam titik batas dan kekontinuan pada limit. Pembahasan mengenai kekontinuan membantu memahami bagaimana suatu fungsi menunjukkan kestabilan nilai pada suatu daerah tertentu.

Berdasarkan uraian tersebut, pembahasan mengenai limit, teorema pada limit, limit dalam titik batas, serta kekontinuan memiliki peranan yang sangat penting dalam analisis variabel kompleks. Oleh karena itu, topik-topik tersebut perlu dipelajari secara sistematis agar dapat memberikan pemahaman yang lebih baik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam makalah ini adalah sebagai berikut:

1. Apa yang dimaksud dengan limit?
2. Bagaimana pembuktian teorema-teorema yang berkaitan dengan limit?
3. Apa yang limit dalam titik batas?
4. Bagaimana kekontinuan pada limit?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan dalam makalah ini adalah sebagai berikut:

1. mengetahui pengertian limit;
2. mengetahui pembuktian teorema-teorema yang berkaitan dengan limit;
3. mengetahui limit dalam titik batas;
4. mengetahui kekontinuan pada limit.

BAB 2. PEMBAHASAN

2.1 Limit

Misalkan fungsi f didefinisikan di semua titik z di dalam suatu lingkungan yang terhapus (deleted neighborhood) di sekitar z_0. Pernyataan bahwa limit $f(z)$ ketika z mendekati z_0 adalah suatu bilangan w_0, atau

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0,$$

berarti bahwa titik $w = f(z)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan w_0 dengan memilih titik z yang cukup dekat ke z_0, tetapi tidak sama dengannya. Sekarang, kita nyatakan definisi limit ini dalam bentuk yang lebih presisi dan dapat digunakan.

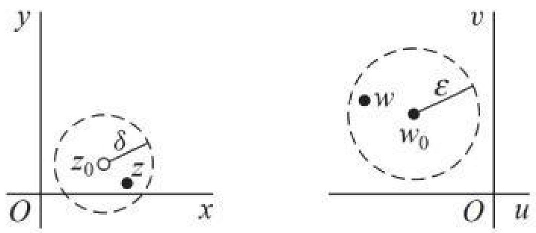
Pernyataan (1) berarti bahwa untuk setiap bilangan positif ϵ (epsilon), terdapat bilangan positif δ (delta) sedemikian sehingga

$$| f(z) - w_0 | < \epsilon \text{ ketika } 0 < | z - z_0 | < \delta$$

Definisi ini secara geometris mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan-ϵ (atau *epsilon neighborhood*) $| w - w_0 | < \epsilon$ dari w_0, pasti ada lingkungan-δ yang terhapus (atau *deleted delta neighborhood*) $0 < | z - z_0 | < \delta$ dari z_0 sedemikian sehingga setiap titik z di lingkungan- δ yang terhapus tersebut akan memiliki bayangan w yang terletak di dalam lingkungan- ϵ (lihat Gambar 23).

Perhatikan dua hal penting:

1. Meskipun semua titik di lingkungan terhapus $0 < | z - z_0 | < \delta$ dipertimbangkan, bayangan titik-titik tersebut tidak harus memenuhi seluruh lingkungan $| w - w_0 | < \epsilon$. Sebagai contoh, jika f bernilai konstan w_0, maka bayangan dari semua titik z tersebut hanyalah titik pusat w_0.
2. Begitu suatu nilai δ ditemukan, kita selalu bisa menggantinya dengan bilangan positif yang lebih kecil, misalnya $\delta/2$.



Mudah untuk menunjukkan bahwa jika limit suatu fungsi $f(z)$ ada di titik z_0, maka limitnya unik (tunggal).

Bukti singkat:

Andaikan ada dua limit yang berbeda, w_0 dan w_1. Dengan menggunakan definisi limit dan ketaksamaan segitiga, kita dapat menunjukkan bahwa untuk bilangan positif ϵ sekecil apapun, berlaku $|w_1 - w_0| < 2\epsilon$. Satu-satunya cara agar hal ini mungkin adalah jika $|w_1 - w_0| = 0$, yang berarti $w_1 = w_0$.

Definisi (2) mengharuskan f terdefinisi di semua titik pada suatu lingkungan terhapus dari z_0. Jika z_0 adalah titik batas dari daerah asal fungsi, definisi ini dapat diperluas dengan menyetujui bahwa ketaksamaan pertama dalam (2) hanya perlu dipenuhi oleh titik-titik z yang berada di dalam daerah asal dan di dalam lingkungan terhapus tersebut.

Contoh 1.

Tunjukkan bahwa jika $f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$ pada cakram terbuka $|z| < 1$, maka

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}, (3)$$

di mana titik 1 berada pada batas daerah asal fungsi f.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa ketika z berada di dalam cakram $|z| < 1$,

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|\bar{z} - 1|}{2}$$

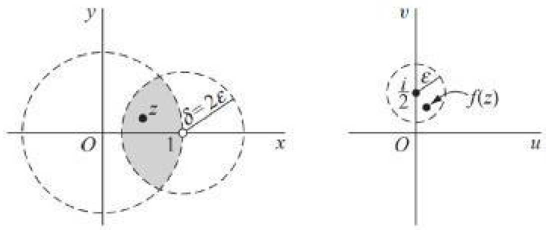
Kita tahu bahwa $|\bar{z} - 1| = |z - 1|$. Jadi,

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z - 1|}{2}$$

Oleh karena itu, untuk setiap z di daerah asal dan setiap bilangan positif ϵ,

$$\left|f(z)-\frac{i}{2}\right| < \epsilon \text{ ketika } 0 < | z-1 | < 2\epsilon.$$

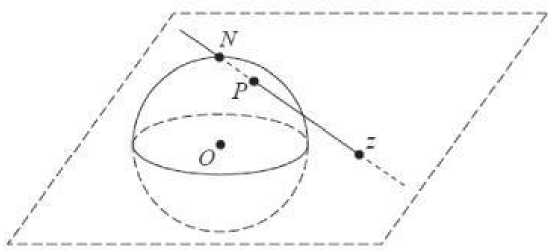
Dengan memilih $\delta = 2\epsilon$ (atau bilangan positif yang lebih kecil darinya), kondisi (2) terpenuhi untuk semua titik z di dalam daerah asal $| z | < 1$. Limit terbukti.



2.2 Teorema pada Limit

2.3 Limit dalam Titik Batas

Terkadang lebih mudah untuk menyertakan bidang kompleks titik pada tak hingga, yang dilambangkan dengan ∞, dan menggunakan limit yang melibatkannya. Bidang kompleks bersama dengan titik ini disebut **bidang kompleks diperluas**.



Untuk memvisualisasikan titik tak hingga, bidang kompleks dapat dibayangkan sebagai bidang yang melalui garis khatulistiwa suatu bola satuan yang berpusat di titik asal (0,0). Untuk setiap titik z pada bidang tersebut, terdapat tepat satu titik P pada permukaan bola. Titik P adalah titik perpotongan antara permukaan bola dan garis melalui titik z dan kutub utara N.

Dengan cara yang sama, untuk setiap titik P pada permukaan bola selain kutub utara N, terdapat tepat satu titik z pada bidang. Dengan menganggap titik N (kutub utara) pada bola sebagai titik tak hingga, diperoleh korespondensi satu-satu antara titik-titik pada permukaan bola dan titik-titik pada **bidang kompleks diperluas**. Bola tersebut dikenal sebagai **bola Riemann**, dan korespondensinya disebut **proyeksi stereografik**.

Perhatikan bagian luar lingkaran satuan yang berpusat di titik asal pada bidang kompleks berkorespondensi dengan setengah bola bagian atas dengan garis khatulistiwa dan titik N dihilangkan. Selain itu, untuk setiap bilangan positif kecil ε, titik-titik pada bidang kompleks yang berada di luar lingkaran $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ berkorespondensi dengan titik-titik pada bola yang dekat dengan N. Oleh karena itu, himpunan $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ disebut lingkungan ε, atau lingkungan dari ∞.

Kita sepakati bahwa ketika menyebut suatu titik z, yang dimaksud adalah titik pada bidang hingga. Selanjutnya, apabila titik tak hingga akan dipertimbangkan, hal tersebut akan disebutkan secara khusus.

Sekarang kita dapat dengan mudah memberikan makna pada pernyataan

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

ketika z_0 atau w_0, atau bahkan keduanya, diganti dengan titik tak hingga. Dalam definisi limit, kita mengganti lingkungan dari z_0 dan w_0 dengan lingkungan dari ∞. Pembuktian teorema berikut akan mengilustrasikan bagaimana hal ini dilakukan.

Teorema

Jika z_0 dan w_0 masing-masing adalah titik pada bidang z dan bidang w, maka

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

(2) $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

(3) $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{\frac{1}{z}}\right) = 0$

Pembuktian:

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

Berarti bahwa untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif δ sehingga
$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ ketika $0 < |z - z_0| < \delta$ … (4)

Artinya, titik $w = f(z)$ berada pada lingkungan ε, yaitu $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$ dari ∞ setiap kali z berada dalam lingkungan terhapus $0 < |z - z_0| < \delta$ dari z_0

Karena pernyataan (4) dapat dituliskan sebagai

$\frac{1}{|f(z)|} < \varepsilon$ ketika $0 < |z - z_0| < \delta$

$\rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - z_0| < \delta$

$\rightarrow \left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - z_0| < \delta$,
maka ekivalen dengan $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

Pembuktian:

$$(2) \lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$$

Berarti bahwa untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif δ sehingga

$|f(z) - w_0| < \varepsilon$ ketika $|z| > \frac{1}{\delta}$ … (5)
Dengan mengganti z menjadi $\frac{1}{z}$ pada pernyataan (5)

$\rightarrow \left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - 0| < \delta$,

maka ekivalen dengan $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

Pembuktian:

$$(3) \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{\frac{1}{z}}\right) = 0$$

Berarti bahwa untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif δ sehingga

$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ ketika $|z| > \frac{1}{\delta}$ … (6)

Ketika z menjadi $\frac{1}{z}$ pada pernyataan (6)

$\rightarrow \frac{1}{|f(z)|} < \varepsilon$ ketika $0 < |z - 0| < \delta$

$\rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - 0| < \delta$

$\rightarrow \left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - 0| < \delta$,

$\rightarrow \left|\frac{1}{f(\frac{1}{z})} - 0\right| < \varepsilon$ ketika $0 < |z - 0| < \delta$

maka ekivalen dengan $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{\frac{1}{z}}\right) = 0$

2.4 Kekontinuan

Suatu fungsi f kontinu pada titik z_0 jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada

(2) $f(z_0)$ ada

(3) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Pernyataan (3) sudah mencakup pernyataan (1) dan (2), karena keberadaan nilai pada kedua sisi persamaan tersebut dibutuhkan. Pernyataan (3) menyatakan bahwa untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif δ sehingga

(4) $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ketika $|z - z_0| < \delta$

(4) $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ketika $|z - z_0| < \delta$

Jika dua fungsi kontinu di suatu titik, maka jumlah dan hasil kali keduanya juga kontinu di titik tersebut. Hasil bagi keduanya juga kontinu di titik tersebut, selama penyebutnya tidak bernilai nol. Pernyataan ini merupakan konsekuensi langsung dari Teorema 2.

Selanjutnya akan membahas dua sifat penting dari fungsi kontinu yang pembuktiannya tidak begitu langsung. Pembuktian kita bergantung pada definisi dari pernyataan (4) tentang kekontinuan, dan hasilnya akan disajikan dalam bentuk teorema.

Teorema 1. Sebuah komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu juga.

Pembuktian:

Misalkan $w = f(z)$ adalah fungsi yang kontinu di z_0, dan misalkan $W = g(w)$ adalah fungsi yang kontinu di titik $f(z_0)$ di bidang-w. Maka, fungsi komposisi $W = g[f(z)]$ adalah kontinu di z_0.

Kekontinuan g di $f(z_0)$ berarti untuk setiap $\epsilon > 0$, kita bisa menemukan $\gamma > 0$ sehingga

$$|g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \epsilon \text{ ketika } | f(z) - f(z_0) | < \gamma.$$

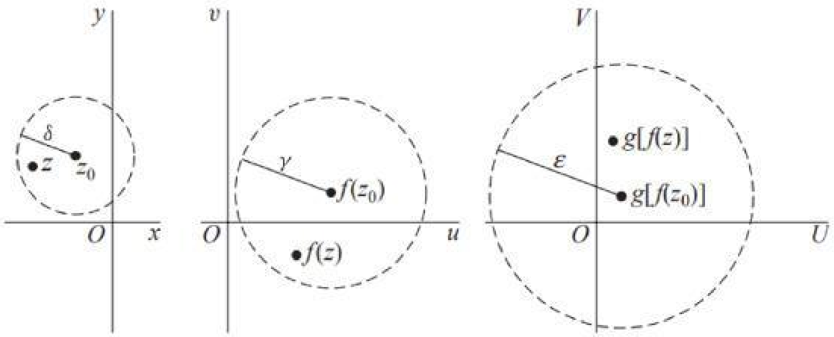
Selanjutnya, karena f kontinu di z_0, maka untuk $\gamma > 0$ yang baru saja kita peroleh, pasti ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$| f(z) - f(z_0) | < \gamma \text{ ketika } | z - z_0 | < \delta.$$

Dengan menggabungkan kedua implikasi ini, kita dapatkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga:

$$| g[f(z)] - g[f(z_0)] | < \epsilon \text{ ketika } | z - z_0 | < \delta.$$

Ini tepat definisi dari kekontinuan $g[f(z)]$ di z_0.



Teorema 2. Jika suatu fungsi $f(z)$ kontinu dan tidak bernilai nol di suatu titik z_0, maka $f(z) \neq 0$ di seluruh suatu lingkungan dari titik tersebut.

Pembuktian:

Dengan mengasumsikan bahwa $f(z)$ kontinu dan tidak nol di z_0, kita dapat membuktikan dengan menetapkan nilai positif $\frac{|f(z_0)|}{2}$ untuk bilangan ε pada pernyataan (4). Hal ini menunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan positif δ sehingga

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ketika $|z - z_0| < \delta$ ... (4)

$\rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{|f(z_0)|}{2}$ ketika $|z - z_0| < \delta$

Jika terdapat suatu titik z dalam lingkungan $|z - z_0| < \delta$ sehingga $f(z) = 0$, maka kontradiksi

$$|f(z_0)| < \frac{|f(z_0)|}{2};$$

Karena hal tersebut tidak mungkin terjadi, maka teorema terbukti.

Kekontinuan suatu fungsi

(5) $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$

berkaitan erat dengan kekontinuan fungsi komponennya, yaitu $u(x,y)$ dan $v(x,y)$. Sebagai contoh, dari Teorema 1 dapat disimpulkan bahwa fungsi (5) tersebut kontinu di suatu titik $z_0 = (x_0, y_0)$ jika dan hanya jika kedua fungsi komponennya kontinu di titik tersebut. Pembuktian teorema berikutnya akan menggambarkan penggunaan pernyataan ini. Teorema tersebut sangat penting dan akan sering digunakan pada bab-bab selanjutnya, khususnya dalam berbagai aplikasi.

Sebelum menyatakan teorema tersebut, kita ingat bahwa suatu daerah *R* disebut **tertutup** jika memuat semua titik batasnya, dan dikatakan **terbatas** jika terletak di dalam suatu lingkaran yang berpusat di titik asal.

Teorema 3. Jika suatu fungsi f continu di seluruh daerah *R* yang tertutup dan terbatas, maka ada bilangan real tak negatif *M* sehingga

(6) $|\ f(z)\ | \leq M$ untuk semua titik z di R,

dan kesamaan berlaku untuk setidaknya satu titik z di R.

Pembuktian:

Untuk membuktikannya, kita mengasumsikan bahwa fungsi

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)$$

adalah kontinu. Maka fungsi

$$\sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2}$$

juga kontinu di seluruh R. Karena R tertutup dan terbatas, fungsi kontinu pada daerah tersebut pasti mencapai nilai maksimum di suatu titik dalam R.

Nilai maksimum itu kita sebut M. Dengan demikian, berlaku ketaksamaan

$$|\ f(z)\ | \leq M$$

untuk semua z di R, dan pada paling tidak satu titik berlaku $|\ f(z)\ | = M$.

Kita mengatakan bahwa fungsi f **terbatas** pada daerah R.

BAB 3. PENUTUP

3.1 Kesimpulan

DAFTAR PUSTAKA

James Ward, B., & Ruel V, C. (2009). Complex variables and applications