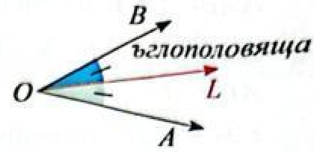
118

ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ. ПОСТРОЯВАНЕ НА ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ДАДЕН ЪГЪЛ

Знаем, че по определение лъч, който разделя един ъгъл на два равни ъгъла, се нарича **ъглополовяща на ъгъла**.
Ако $\overrightarrow{OL}$ е **ъглополовяща** на $\sphericalangle AOB$, то $\sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$.



Сега ще докажем теорема – свойство и теорема – признак за точките от ъглополовящата на ъгъл.

Теорема – свойство

Всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл е на равни разстояния от раменете му.

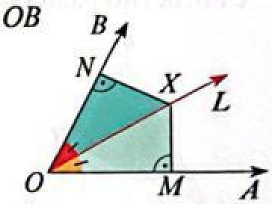
Дадено:
$\overrightarrow{OL}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$
$X \in \overrightarrow{OL}$, $XM \perp OA$ и $XN \perp OB$
Да се докаже:
$XM = XN$
Доказателство:
Разглеждаме ΔOMX и ΔONX.
1) OX – обща страна
2) $\sphericalangle MOX = \sphericalangle NOX$ (OL – ъглополовяща)
3) $\sphericalangle OMX = \sphericalangle ONX = 90°$
$\Rightarrow \Delta OMX \cong \Delta ONX$ по втори признак.

Следователно $XM = XN$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Теорема – признак

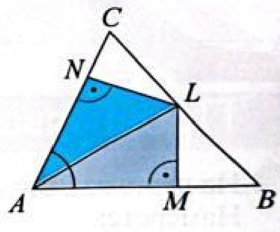
Всяка точка от вътрешността на даден ъгъл, която е на равни разстояния от раменете му, лежи на ъглополовящата на този ъгъл.

Дадено:
$\overrightarrow{OL}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$,
точка X – вътрешна на $\sphericalangle AOB$
$XM \perp OA$ и $XN \perp OB$
$XM = XN$
Да се докаже:
$X \in \overrightarrow{OL}$



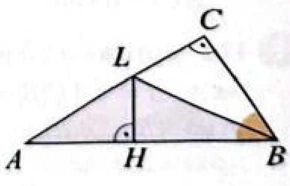
Доказателство:
Разглеждаме ΔOMX и ΔONX – правоъгълни
1) $XM = XN$ (по условие)
2) OX – обща страна
$\Rightarrow \Delta OMX \cong \Delta ONX$ по признака за еднаквост на правоъгълни триъгълници
$\Rightarrow \sphericalangle MOX = \sphericalangle NOX$ (съответни ъгли).
Следователно $X \in \overrightarrow{OL}$.

1 На чертежа точка L лежи на страната BC на остроъгълния ΔABC, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AB и AC.
а) Ако AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и $LM = 7{,}7$ cm, намерете LN.
б) Ако $LM = LN$ и $\sphericalangle BAC = 70°$, намерете мерките на $\sphericalangle MAL$ и $\sphericalangle ALN$.



Решение:
а) От условието, че точка L е от ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и LM и LN са разстоянията до раменете на ъгъла, следва, че $LM = LN = 7{,}7$ cm.
б) От това, че LM и LN са разстоянията от точка L до раменете на ъгъл $\sphericalangle BAC$ и $LM = LN$, следва, че AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, т.е.
$\sphericalangle MAL = \sphericalangle NAL = \frac{70°}{2} = 35°$.
От ΔALN – правоъгълен, следва, че $\sphericalangle ALN = 90° - 35° = 55°$.

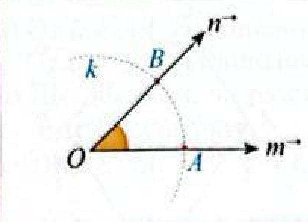
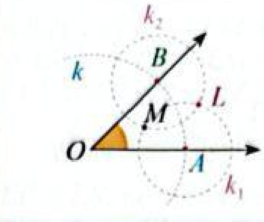
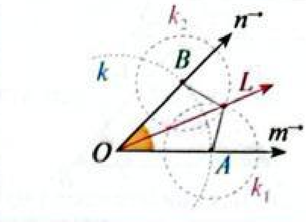
2 Даден е правоъгълен ΔABC с ъглополовяща BL и хипотенуза $AB = 8$ cm. Ако $LC = 3{,}5$ cm, намерете лицето на ΔABL.



Решение:
Нека LH е разстоянието от точка L до страната AB.
От това, че L лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle ABC \Rightarrow LH = LC = 3{,}5$ cm.
$S_{\Delta ABL} = \frac{AB \, . \, LH}{2} = \frac{8 \, . \, 3{,}5}{2} = 14 \text{ cm}^2$

3 Даден е $\sphericalangle Omn$. Постройте с линийка и пергел ъглополовящата на $\sphericalangle Omn$.

Решение:

Първа стъпка:	**Втора стъпка:**	**Трета стъпка:**
		
Построяваме окръжност $k(O; r)$. $k \cap \overrightarrow{Om} = A$ $k \cap \overrightarrow{On} = B$	Построяваме окръжности $k_1(A; r_1)$ и $k_2(B; r_1)$, $r_1 < r$ $k_1 \cap k_2 = (L, M)$	Построяваме лъч $\overrightarrow{OL}$. Ще докажем че лъчът $\overrightarrow{OL}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$.

Разглеждаме ΔAOL и ΔBOL.

1) $OA = OB = r$ – по построение
2) $AL = BL = r_1$ – по построение
3) OL – обща страна

$\Rightarrow \Delta AOL \cong \Delta BOL$ по трети признак.
$\Rightarrow \sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL$ (съответни ъгли).

Следователно лъчът $\overrightarrow{OL}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$.

Какво научих

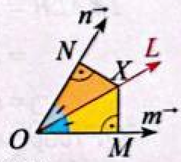
Знам теореми за ъглополовяща на ъгъл.

$\overrightarrow{OL}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$ и точка X е от вътрешността на $\sphericalangle Omn$.

$XM \perp \overrightarrow{Om}$ и $XN \perp \overrightarrow{On}$

свойство
Ако $X \in \overrightarrow{OL}$, то $XM = XN$.

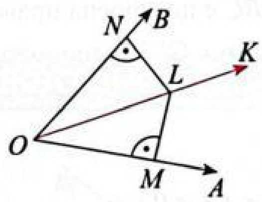
признак
Ако $XM = XN$, то $X \in \overrightarrow{OL}$.



Мога да построявам с линия и пергел ъглополовяща на ъгъл.

Проверявам какво знам

4 На чертежа лъчът $\overrightarrow{OK}$ е вътрешен за $\sphericalangle AOB$. Точка $L \in \overrightarrow{OK}$, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



а) Ако $\overrightarrow{OK}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$ и $LM + LN = 12{,}6$ cm, намерете дължината на LN.

б) Ако $LM = LN$ и $\sphericalangle AOB = 66°$, намерете мярката $\sphericalangle AOK$.

5 В остроъгълния ΔABC $\sphericalangle ACB = 50°$. Ако CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ и LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AC и BC, намерете ъглите на ΔMLN.

6 В правоъгълния ΔABC $(\sphericalangle ACB = 90°)$ BL е ъглополовяща. Ако LH е разстоянието от точка L до страната AB и $CL = AH$, докажете, че:

а) ΔAHL е равнобедрен;
б) ΔABC е равнобедрен.

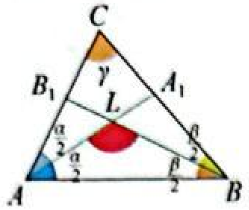
7 Даден е ΔABC с ъглополовяща CL ($L \in AB$). Разстоянието от точка L до страната BC е равно на 8 cm. Ако $CL = BL = 16$ cm, намерете:
а) ъглите на ΔABC; **б)** дължината на страната AB.

119

УПРАЖНЕНИЕ. ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ

1 Разгледайте някои основни задачи за ъглополовящи в триъгълник и докажете твърденията в тях.

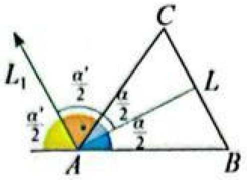
а)



Ако ъглополовящите AA_1 и BB_1 на ΔABC се пресичат в точка L и $\sphericalangle ACB = \gamma$,

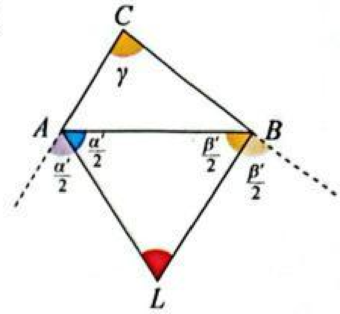
то $\boxed{\sphericalangle ALB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}}$.

б)



Ако AL и AL_1 са ъглополовящи съответно на вътрешния и външния ъгъл при върха A на ΔABC, то $\boxed{\sphericalangle L_1AL = 90^\circ}$.

в)



Ако AL и BL са ъглополовящи съответно на външните ъгли при върховете A и B на ΔABC и $\sphericalangle ACB = \gamma$,

то $\boxed{\sphericalangle ALB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}}$.

Упътване:

в) От теорема за сбор на ъглите на ΔABL следва, че

$$\sphericalangle ALB = 180^\circ - \frac{\alpha'}{2} - \frac{\beta'}{2} \;|.\,2 \Leftrightarrow 2\sphericalangle ALB = 360^\circ - \alpha' - \beta'$$

Знаем, че $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ (съседни ъгли) и

$\beta' = 180^\circ - \beta$ (съседни ъгли)

Тогава получаваме

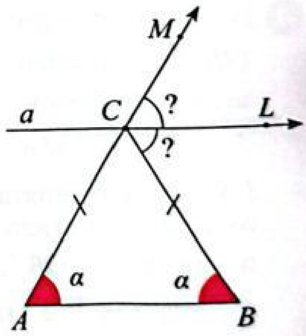
$$2\sphericalangle ALB = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta)$$
$$= 360^\circ - 180^\circ + \alpha - 180^\circ + \beta$$
$$= \alpha + \beta.$$

От теорема за сбор на ъглите на ΔABC следва, че

$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$.

Следователно $2\sphericalangle ALB = 180^\circ - \gamma \;|:2 \;\Leftrightarrow \sphericalangle ALB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

2 На чертежа през върха C на равнобедрения ΔABC е построена правата a, успоредна на основата му AB. Докажете, че лъчът $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на външния ъгъл BCM на ΔABC.



Решение:

Ще докажем, че $\sphericalangle BCL = \sphericalangle MCL$.

От това, че ΔABC е равнобедрен $(AC = BC) \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$.

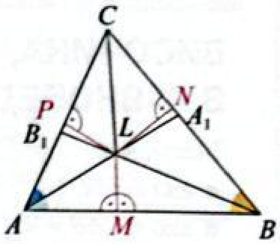
От това, че $\sphericalangle BCM$ е външен ъгъл за $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BCM = \sphericalangle A + \sphericalangle B = 2\alpha$.

От $(a \parallel AB) \cap BC \Rightarrow \sphericalangle BCL = \sphericalangle B = \alpha$ като кръстни ъгли.

$\sphericalangle MCL = \sphericalangle BCM - \sphericalangle BCL = 2\alpha - \alpha = \alpha$

Получихме, че $\sphericalangle BCL = \alpha = \sphericalangle MCL$.

Следователно $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BCM$.



3 Ъглополовящите AA_1 и BB_1 на ΔABC се пресичат в точка L. Отсечките LM, LN и LP са разстоянията от точка L съответно до страните AB, BC и AC.

а) Ако $LM = 2$ cm, намерете LP и LN.

б) Докажете, че CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Решение:

а) От $L \in AA_1$ (ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$) $\Rightarrow LP = LM = 2$ cm.
От $L \in BB_1$ (ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$) $\Rightarrow LN = LM = 2$ cm.

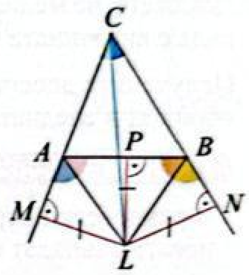
б) Ще докажем, че разстоянията LN и LP от точка L до раменете на $\sphericalangle ACB$ са равни.

$$\left.\begin{array}{l}\text{От } L \in AA_1 \Rightarrow LM = LP\\ \text{От } L \in BB_1 \Rightarrow LM = LN\end{array}\right\} \Rightarrow LP = LN,$$
но това са разстояния до раменете на $\sphericalangle ACB$, следователно CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Така доказахме, че трите ъглополовящи на вътрешните ъгли на един триъгълник се пресичат в една точка L, която се намира на равни разстояния от страните му ($LM = LP = LN$).

ПРАКТИЧЕСКО ПРАВИЛО

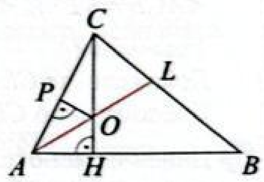
За да докажем, че вътрешен лъч е ъглополовяща на ъгъл, може да използваме един от начините:
1) Доказваме, че лъчът разделя дадения ъгъл на два равни ъгъла.
2) Доказваме, че точка от лъча се намира на равни разстояния от раменете на ъгъла.



4 На чертежа ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и B на ΔABC се пресичат в точка L. Докажете, че CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Доказателство:
Построяваме разстоянията LM, LP и LN от точка L съответно до правите AC, AB и BC.

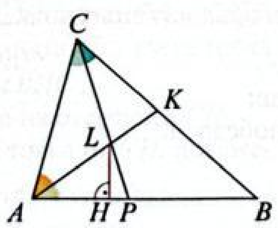
$$\left.\begin{array}{l}\text{От } AL \text{ – ъглополовяща на } \sphericalangle MAB \Rightarrow LM = LP\\ \text{От } BL \text{ – ъглополовяща на } \sphericalangle ABN \Rightarrow LN = LP\end{array}\right\} \Rightarrow LM = LN,$$
но това са разстояния до раменете на $\sphericalangle MCN$, следователно CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.



5 На чертежа ΔABC е остроъгълен. Височината CH и ъглополовящата AL се пресичат в точка O и OP е разстоянието от точка O до страната AC.
Кое от следните твърдения НЕВИНАГИ е вярно?

А) $OH = OP$ Б) $\Delta AOH \cong \Delta AOP$
В) $OP = OL$ Г) $\overrightarrow{OA}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle HOP$.

Проверявам какво знам



6 На чертежа ъглополовящите AK и CP на ΔABC се пресичат в точка L, а $LH = 2{,}2$ cm е разстоянието от точка L до страната AB. Ако $CL = 4{,}4$ cm, намерете мярката на $\sphericalangle ACB$.

7 В остроъгълния ΔABC точка M е средата на страната AB. Ако MH и MD са разстоянията от точка M съответно до страните AC и BC и $MH = MD$, докажете, че:
а) $\Delta AMH \cong \Delta BMD$; б) ΔABC е равнобедрен.

8 Ако ъглополовящата на външния ъгъл при върха A на ΔABC е успоредна на страната BC, докажете, че ΔABC е равнобедрен с основа BC.

9 Даден е ΔABC с ъглополовяща AL. През точка L е построена права, успоредна на AB, която пресича страната AC в точка M. Докажете, че ΔALM е равнобедрен.