



CĐ 6

MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

I Kiến thức cần nhớ

1 Đại số tổ hợp

a) Quy tắc cộng

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.1. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n$ cách hoàn thành. Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động ($k \in \mathbb{N}, k > 2$).

b) Quy tắc nhân

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.2. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành. Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi k hành động liên tiếp ($k \in \mathbb{N}, k > 2$).

c) Hoán vị

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.3. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có

⚡ ĐỊNH LÝ 6.1.

$$P_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

d) Chỉnh hợp

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.4. Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử. Ta có

⚡ ĐỊNH LÝ 6.2.

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

e) Tổ hợp

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.5. Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1 \leq k \leq n$. Ta có

⚡ ĐỊNH LÝ 6.3.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$



Quy ước $0! = 1, C_n^0 = 1$. Với những quy ước đó, ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} (0 \leq k \leq n)$.

2 Xác suất của biến cố

a) Một số khái niệm

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.6. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.7. Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng $\emptyset$ là biến cố không thể, Ω là biến cố chắc chắn, $\bar{A} = \Omega \setminus A$ là biến cố đối của biến cố A .

Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A , ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.8. Xác suất của biến cố A , kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A, Ω . Như vậy

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

b) Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω . Khi đó, ta có các tính chất sau

⚡ TÍNH CHẤT 6.1. ☑ $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1;$

☑ $0 \leq P(A) \leq 1$ với mỗi biến cố A ;

☑ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố A .

c) Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.9. Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu.

☑ Đặt $C = A \cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cup B$.

☑ Đặt $D = A \cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cap B$ hay AB .

☑ Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc.

☑ Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

⚡ NHẬN XÉT.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



3 Xác suất có điều kiện

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.10. Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu là $P(A | B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra
Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$.

⚡ NHẬN XÉT. Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$.

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có $P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A) = P(A | B) = P(A | \bar{B})$ và $P(B) = P(B | A) = P(B | \bar{A})$.

4 Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

a) Công thức xác suất toàn phần

⚡ ĐỊNH LÍ 6.4. Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B}).$$

b) Công thức Bayes

⚡ ĐỊNH LÍ 6.5. Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có

$$P(B | A) = \frac{P(B) \cdot P(A | B)}{P(A)}.$$

⚡ NHẬN XÉT. Với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$ thì công thức Bayes còn có dạng

$$P(B | A) = \frac{P(B) \cdot P(A | B)}{P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B})}.$$