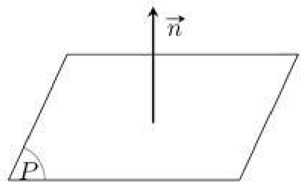
CĐ 5 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

I Kiến thức cơ bản

1 Phương trình mặt phẳng

a. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

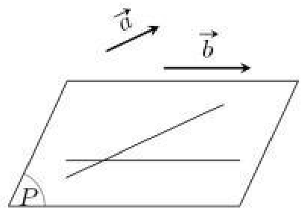
Cho mặt phẳng (P). Nếu véc-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) thì $\vec{n}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của (P).



Hình 1

b. Cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P). Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (P) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của (P).



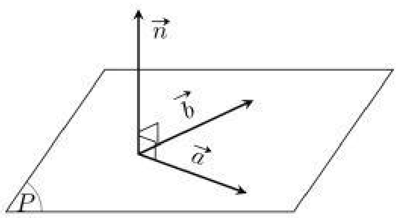
Hình 2

c. Xác định véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp véc-tơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (P) nhận hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp véc-tơ chỉ phương thì (P) nhận véc-tơ

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

làm véc-tơ pháp tuyến.



Hình 3

Véc-tơ $\vec{n}$ xác định như trên chính là tích có hướng (hay tích véc-tơ) của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
Kí hiệu $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ hoặc $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

d. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 , được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét.

a) Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

b) Cho mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó

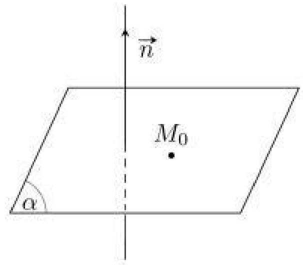
$$M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in(P)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

e. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết véc-tơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.



Hình 4

f. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp véc-tơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$, ta thực hiện như sau:

- Tìm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.
- Viết phương trình (P) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

g. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

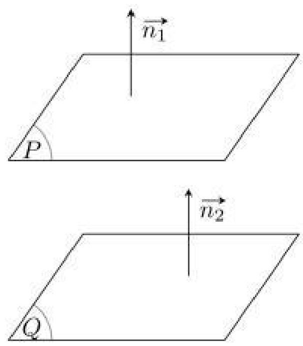
- Tìm cặp véc-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- Tìm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- Viết phương trình (P) đi qua điểm A và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

NHẬN XÉT. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều khác 0. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Phương trình này được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*

h. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng
$(P)\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q)\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.
Khi đó:

- $(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k\left(A_2;B_2;C_2\right)\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k\left(A_2;B_2;C_2\right)\\ D_1=kD_2\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.

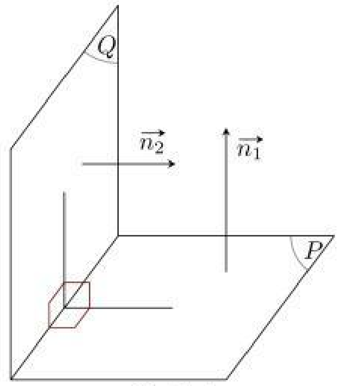


Hình 5

i. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng
$(P)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.
Khi đó:

- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
- (P), (Q) cắt nhau $\Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k\,(A_2; B_2; C_2)$.



Hình 6

j. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$.
Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức

$$\mathrm{d}\,(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2 Phương trình đường thẳng trong không gian

a. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Véc-tơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là *véc-tơ chỉ phương của d*.

b. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm véc-tơ chỉ phương có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ (t được gọi là tham số).}$$

⚠ *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.*

c. Phương trình chính tắc đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng d.

d. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t. \end{cases}$$

Nếu $x_A \neq x_B$, $y_A \neq y_B$, $z_A \neq z_B$ thì d có phương trình chính tắc

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

e. Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

Gọi $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d, Δ và $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm trên d.
Ta có

- $d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b},\ k \in \mathbb{R} \\ M \notin \Delta. \end{cases}$

- $d \equiv \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b},\ k \in \mathbb{R} \\ M \in \Delta. \end{cases}$

f. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d\colon \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } \Delta\colon \begin{cases} x = x'_0 + b_1t' \\ y = y'_0 + b_2t' \\ z = z'_0 + b_3t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

Gọi $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d và Δ.

Xét hệ phương trình ẩn t và t' là $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + b_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + b_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + b_3t'. \end{cases}$

Ta có

- d và Δ cắt nhau khi và chỉ khi hệ trên có đúng một nghiệm.

- d và Δ chéo nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ không cùng phương và hệ trên vô nghiệm.

g. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và Δ có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$.
Ta có $d \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

h. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d và Δ có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được tính bởi công thức

$$\cos(d, \Delta) = \left|\cos(\vec{a}, \vec{b})\right| = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

i. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

j. Góc giữa hai mặt phẳng

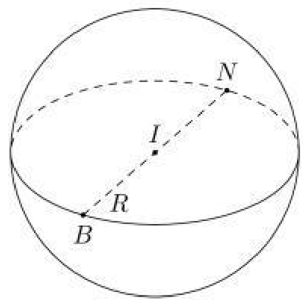
Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$ và $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{m}, \vec{n})| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

3 Phương trình mặt cầu

a. Khái niệm mặt cầu

Trong không gian, cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu $S(I; R)$, là tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn $IM = R$. Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm I gọi là đường kính của mặt cầu.



Cho mặt cầu $S(I; R)$.

- *Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.*
- *Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.*
- *Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.*

b. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

> NHẬN XÉT. Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.