CĐ 4 NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

I Tóm tắt lý thuyết

1 Nguyên hàm

a. Định nghĩa

Cho $\mathcal{K}$ là khoảng hoặc đoạn, hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathcal{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathcal{K}$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$. Khi đó mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số. Vì vậy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Mọi hàm số liên tục trên $\mathcal{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathcal{K}$. Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

b. Tính chất

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathcal{K}$.

- $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, với k là hằng số khác 0;
- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Nguyên hàm của một số hàm số cơ bản

- Với $\alpha \neq -1$, ta có $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$;
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
- $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

2 Tích phân

a. Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

b. Tính chất

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, ta có

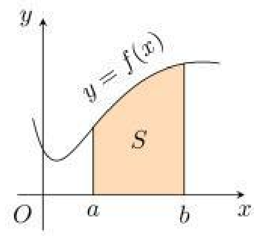
- $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k là hằng số);
- $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- Giả sử c là số thực tùy ý thuộc đoạn $[a;b]$. Khi đó, ta có

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

c. Ứng dụng

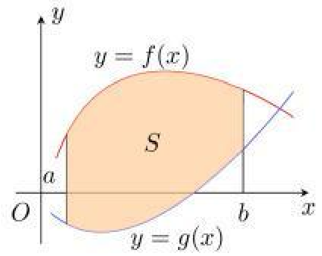
- Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$



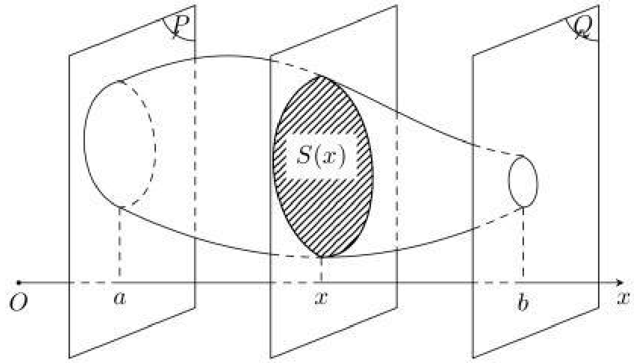
- Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$



-

Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức



$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$