

1. Muestre que:

a) $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i+z}{i-z} \right),$

b) $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$

2. Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$.

a) Suponiendo que las derivadas necesarias existen, demuestre que

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

b) Demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

y de una interpretación geométrica.

3. Encuentre la función analítica $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, cuando

a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2.$

b) $v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x.$

4. Considere la función

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

a) Evalúe la integral de $f(z)$ a lo largo del círculo $|z - i| = 1$.

b) Desarrolle una expansión de Laurent de $f(z)$ alrededor del punto $z = 0$ válida para valores pequeños de $|z|$. Especifique el rango exacto sobre el cual su expansión se cumple.

c) Determine la expansión de Laurent para $f(z)$ alrededor de $z = 0$ para valores grandes de $|z|$.

5. Considere la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

a) Evalúe la integral de $f(z)$ a lo largo del círculo $|z - 1| = 1/2$.

b) Desarrolle una expansión de Laurent de $f(z)$ alrededor del punto $z = 1$ válida para valores pequeños de $|z - 1|$. Especifique el rango exacto sobre el cual su expansión se cumple.

c) Determine la expansión de Laurent para $f(z)$ alrededor de $z = 1$ para valores grandes de $|z - 1|$.

6. Considere la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}.$$

- Evalue la integral de $f(z)$ a lo largo del círculo $|z + 1| = 1/2$.
- Desarrolle una expansión de Taylor de $f(z)$ alrededor del punto $z = 0$ válida para $|z| < 1$.
- Desarrolle una expansión de Laurent de $f(z)$ alrededor del punto $z = 0$ válida para $1 < |z| < 2$.
- Desarrolle una expansión de Laurent de $f(z)$ alrededor del punto $z = 0$ válida para $|z| > 2$.

7. Determine la naturaleza de las singularidades de cada una de las siguientes funciones y evalúe los correspondientes residuos.

a) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$

c) $f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}.$

b) $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2)}.$

d) $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}.$

8. Utilizando el Teorema del Residuo evalúe la integral $\oint_C f(z)dz$, con C el círculo $|z| = 4$, para cada una de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{z}{z^2-1}.$

c) $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z+2)}.$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}.$

d) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+6z+4)}.$

9. Use el Teorema del Residuo para evaluar las siguientes integrales.

a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta}.$

c) $\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2}, \quad \text{donde } -1 < a < 1.$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta d\theta}{5-4 \cos \theta}.$

d) $\int_0^\pi \sin^{2n} \theta d\theta, \quad \text{donde } n = 1, 2, \dots$

10. Utilizando el Teorema del Residuo, demuestre que

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{(x^4+1)^2} dx = \sqrt{2}\pi.$

d) $\int_0^\infty \frac{ab}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{\pi}{2(a+b)}.$

11. Evalúe las integrales

a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i3x}}{x-2i} dx.$

c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{(x-a)^2+b^2} dx.$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos kx}{x^2+1} dx.$

d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx.$

12. Muestre que, con $a > 0$,

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$. ¿Cómo se modifica el lado derecho si $\cos x$ se reemplaza por $\cos kx$?

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}$. ¿Cómo se modifica el lado derecho si $\sin x$ se reemplaza por $\sin kx$?

13. a) Muestre que $f(z) = z^4 - 2 \cos 2\theta z^2 + 1$ tiene ceros en $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $-e^{i\theta}$ y $-e^{-i\theta}$.

b) Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \theta}.$$

c) Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \theta}.$$

14. La densidad de probabilidad correspondiente a la distribución normal de estadística está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]$$

con x en el rango $(-\infty, \infty)$.

a) Muestre que el valor medio de x , $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, es igual a μ .

b) Muestre que la desviación estándar, $(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$, está dada por σ .

15. Utilizando la función de distribución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

con $(-\infty, \infty)$ para el rango de x . Muestre que

a) el valor medio de x , $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, es igual a $\alpha\beta$.

b) la variancia, $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, está dada por $\alpha\beta^2$.

16. Una partícula de masa m que se mueve en un potencial simétrico $V(x) = A|x|^n$ tiene una energía total $E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x)$, donde A es una constante. Demuestre que el período del movimiento es

$$\tau = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{n}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n} + \frac{1}{2})},$$

donde x_{max} es el punto de retorno clásico dado por $Ax_{max}^n = E$.