LATIHAN SOAL

Fungsi Komposisi

Kerjakan soal di bawah ini dengan teliti dan tepat!

1. Seorang siswa sedang merancang sistem otomatis untuk menghitung nilai akhir dari suatu proses berdasarkan data input awal. Setiap nilai input awal akan diproses melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan fungsi $f(x) = 2x - 1$ untuk melakukan penyesuaian awal terhadap data. Kemudian, hasil dari tahap pertama diproses lagi menggunakan fungsi $g(x) = x^2 + x - 5$ untuk menghasilkan nilai akhir. Tentukan rumus fungsi yang menggambarkan keseluruhan proses input awal hingga menghasilkan output akhir!

2. Di sebuah pabrik, sebuah mesin A menerima input bahan mentah dari bagian awal proses dan memprosesnya sesuai fungsi $f(x)$, lalu mesin B menerima hasil dari mesin A dan mengolahnya lagi sesuai fungsi $g(x) = 2x + 1$. Setelah seluruh proses selesai, jumlah total hasil produksi dari gabungan kedua mesin tersebut dinyatakan oleh fungsi $g \circ f(x) = 6x^2 + 2x - 13$, dengan x adalah jumlah unit bahan mentah awal. Jika diketahui fungsi mesin B adalah $g(x) = 2x + 1$, tentukan bagaimana mesin A bekerja!

3. Sebuah alat pengukur cuaca memproses data dalam tahap. Pada tahap pertama dirumuskan dengan fungsi $f(x) = x - 2$, dimana x adalah suhu dalam derajat Celsius. Kemudian, pada tahap kedua terdapat penyesuaian lingkungan dengan fungsi g, diketahui bahwa gabungan kedua fungsi ini menghasilkan fungsi komposisi $g \circ f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x - 3$. Jika suhu asli yang diukur adalah 4°C, berapakah hasil akhir pengukuran setelah menerima input 2°C?

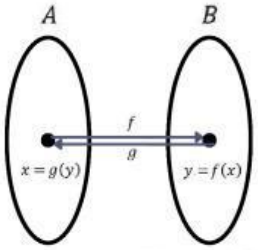
LIVEWORKSHEETS

Fungsi Invers

Definisi Fungsi Invers

Definisi:

Perhatikan gambar di bawah ini!

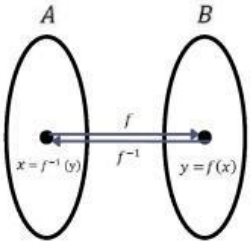


Suatu fungsi $f : A \to B$, memasangkan $x \in A$ dengan $y \in B$, $f: x \to y$ atau $f(x) = y$. Jika relasi dibalik dari $B \to A$, yaitu $g: B \to A$, memasangkan $y \in B$ dengan $x \in A$, $g: y \to x$ atau $g(y) = x$, relasi g dinamakan invers atau balikan fungsi f serta ditulis dengan lambang $g = f^{-1}$.

Invers fungsi belum tentu pula suatu fungsi. Akan tetapi, apabila terdapat invers fungsi yang merupakan suatu fungsi, maka fungsi tersebut disebut fungsi invers. Artinya g adalah fungsi balikan dari f, dan sebaliknya f adalah fungsi balikan dari g, dapat ditulis sebagai berikut.

$g = f^{-1}$ $\qquad$ $f = g^{-1}$

Syarat :



Pada gambar di skema di samping, jika f mempunyai invers, y adalah peta dari x oleh f sehingga $y = f(x)$.

Jika y adalah peta dari x oleh f, x adalah peta dari y oleh f^{-1} sehingga $x = f^{-1}(y)$. Sebagai dasar untuk mencari fungsi invers dari suatu fungsi adalah pengertian $y = f(x)$ dan $x = f^{-1}(y)$, yaitu persamaan y dalam x dibalik sehingga persamaan x dalam y.

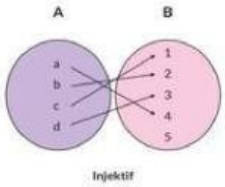
LIVEWORKSHEETS

RINGKASAN MATERI

Sifat-SIfat Fungsi Invers

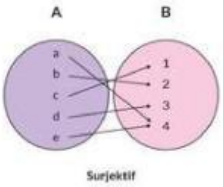
Sifat-Sifat Fungsi:

1.Fungsi Injektif



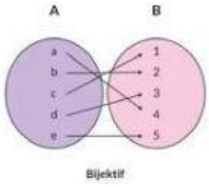
Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut **fungsi injektif** apabila setiap anggota yang berbeda di $A(D_f)$ mempunyai pasangan atau kawan yang berbeda di $B(K_f)$. Semua anggota $B(K_f)$ tidak boleh memiliki pasangan lebih dari satu. Anggota $B(K_f)$ boleh tidak memiliki pasangan di $A(D_f)$.

2. Fungsi Surjektif



Suatu fungsi di $f: A \rightarrow B$ disebut **fungsi surjektif** apabila setiap anggota di B (kodomain) mempunyai pasangan di A (domain). Anggota B (kodomain) boleh memiliki pasangan lebih dari satu.

3. Fungsi Bijektif



Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut **korespondensi satu-satu atau bijektif**, apabila fungsi tersebut merupakan **fungsi surjektif** sekaligus **fungsi injektif**.

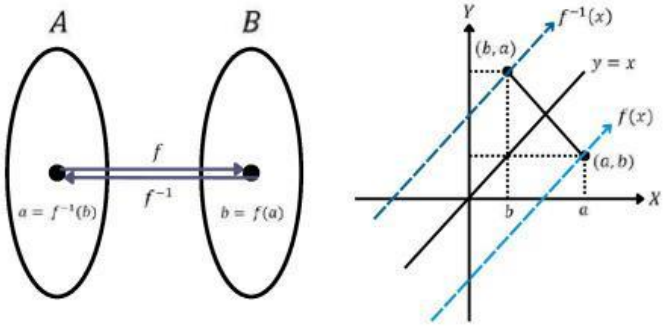
Secara umum tidak semua fungsi memiliki fungsi invers. Hanya **fungsi bijektif (injektif dan surjektif)** saja yang memiliki invers.

LIVEWORKSHEETS

RINGKASAN MATERI

Grafik Fungsi Invers

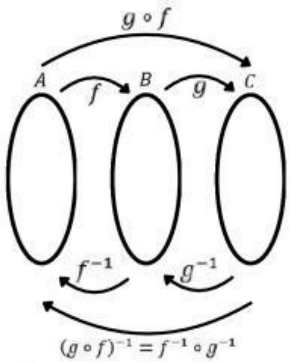
Perhatikan gambar di bawah ini!



Dalam notasi himpunan apabila $(a, b) \in f^{-1}$. Hal ini berarti apabila grafik fungsi $f(x)$ melalui titik (a, b) mengakibatkan grafik fungsi $f^{-1}(x)$ merupakan hasil refleksi grafik fungsi $f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Fungsi Invers Dari Suatu Fungsi

Perhatikan gambar di bawah ini!



Fungsi $f: A \to B$ dan fungsi $g: B \to C$.

Fungsi $h: A \to C$ merupakan komposisi fungsi dari fungsi dari f dan g, yaitu $h = g \circ f$.

Invers dari fungsi-fungsi tersebut adalah $g^{-1}: C \to B$ dan $f^{-1}: B \to A$, sedangkan $h^{-1}: f^{-1} \circ g^{-1}$. Karena $h = g \circ f$, maka $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$. Sehingga diperoleh hubungan invers dari fungsi komposisi: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

LIVEWORKSHEETS

RINGKASAN MATERI

Silahkan klik untuk membuka video dari contoh penerapan fungsi invers!

Contoh 2 :



Seorang penjahit profesional bernama Pak Andi menerima pesanan pembuatan seragam sekolah. Untuk menghitung berapa banyak meter kain yang dibutuhkan dapat dirumuskan dengan matematika yaitu $f(x) = 3x + 6$ dengan x adalah jumlah setel seragam yang akan dibuat dan $f(x)$ adalah jumlah kain yang dibutuhkan dalam meter. Jika Pak Andi memiliki 27 meter kain, berapakah jumlah setel seragam yang dapat dibuat oleh Pak Andi dari kain tersebut?

Penyelesaian:

1. **Pahami Masalah**

   Diketahui:

   Fungsi $f(x) = 3x + 6$

   x = jumlah setel seragam yang akan dibuat

   $f(x)$ = jumlah kain yang dibutuhkan (dalam meter)

   Di misalkan $y = f(x)$

   Ditanya:

   Jumlah setel seragam yang dapat dibuat oleh Pak Andi dari kain tersebut

2. **Rencana Penyelesaiannya**

   Jawab:

   $y = f(x) = 3x + 6$

LIVEWORKSHEETS

3. Laksanakan Penyelesaiannya

$$y = 3x + 6$$

$$3x = y - 6$$

$$x = \frac{y-6}{3}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$

Maka $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{3}$

Sehingga,

$$f^{-1}(27) = \frac{27-6}{3}$$

$$= 7$$

4. Periksa Kembali dan Simpulkan

Jadi, Jumlah setel seragam yang dapat dibuat oleh Pak Andi dari kain tersebut adalah 7 setel.

LIVEWORKSHEETS

MASALAH 6




Penghasilan per bulan seorang karyawan terdiri atas gaji pokok dan bonus penjualan. Gaji pokok karyawan tersebut adalah $Rp.4.500.000{,}00$. Bonus penjualannya sebesar $g(x) = 5000x$ rupiah dengan x menyatakan banyaknya unit barang yang laku dijual olehnya selama sebulan. Jika $f(x)$ menyatakan penghasilan total karyawan tersebut, maka tentukan rumus invers f nya!

Penyelesaian:

1 Pahami Masalah

Diketahui:

Fungsi $g(x) =$ .....

Gaji pokok karyawan adalah .....

x = banyaknya unit barang yang laku dijual olehnya selama sebulan

$f(x)=$ .....

Di misalkan $y = f(x)$

Ditanya:

.....

2 Rencanakan Penyelesaiannya

Jawab:

Penghasilan total karyawan itu sama dengan gaji pokoknya ditambah bonus penjualan. Oleh karena itu, fungsi f nya yaitu:

$y = f(x) =$ ..... $+$ x

3 Laksanakan Penyelesaiannya

$$y = \text{.....} + \text{.....}$$

$$y - \text{.....} = \text{.....}\, x$$

$$x = \frac{y - \text{.....}}{\text{.....}}$$

$$x = \frac{1}{5000}y - \text{.....}$$

LIVEWORKSHEETS

Karena $x = f^{-1}(y)$

Maka $f^{-1}(x) = \frac{1}{5000}x$ – .....

4 Periksa Kembali dan Simpulkan

Jadi, invers dari fungsi f adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{5000}x$ – .....



MASALAH 7



Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besarnya dana yang diperoleh bergantung kepada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 500x - 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan. Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar $Rp.\,5.000.000{,}00$, berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Penyelesaian:

1 Pahami Masalah

Diketahui:

Fungsi $f(x) =$ ..... – .....

x = Banyak penonton yang menyaksikan pertandingan

Di misalkan $y = f(x)$

Dana hasil penjualan tiket penonton sebesar .....

Ditanya:

.....

LIVEWORKSHEETS

2 **Rencanakan Penyelesaiannya**

Jawab:

$y = f(x) =$ ..... $- 20.000$

3 **Laksanakan Penyelesaiannya**

$y =$ .....

$500x =$ .....

$x = \dfrac{\text{.....} + \text{.....}}{500}$

Karena $x = f^{-1}(y)$

Maka $f^{-1}(x) = \dfrac{\text{.....} + \text{.....}}{500}$

Sehingga,

$f^{-1}(5.000.000) = \dfrac{\text{.....} + \text{.....}}{500}$

$f^{-1}(5.000.000) =$ .....

4 **Periksa Kembali dan Simpulkan**

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan ada ..... orang.



MASALAH 8

Tiara adalah seorang pemilik toko bunga yang mampu merangkai ikatan bunga menjadi buket dengan mengikuti rumus matematika $g(x) = x^2 + 4$, dengan x adalah banyak buket bunga yang dihasilkan. Jika dalam bulan ini Tiara mendapatkan orderan buket bunga pernikahan sebanyak 4.100 buah. Hitunglah berapa ikat bunga yang Tiara butuhkan!



LIVEWORKSHEETS

Penyelesaian:

1 Pahami Masalah

Diketahui:

Fungsi $g(x) =$ ..... + ...

x = Banyak buket bunga yang dihasilkan

Di misalkan $y = g(x)$

Jumlah orderan buket bunga pernikahan sebanyak .....

Ditanya:

.....

2 Rencanakan Penyelesaiannya

Jawab:

$y = g(x) =$ ..... + ...

3 Laksanakan Penyelesaiannya

$y \quad =$ ..... + ...

$x^2 \quad =$ ..... − .....

$x \quad = \sqrt{\quad -}$

.....

Karena $x = g^{-1}(y)$

Maka $g^{-1}(x) = \sqrt{\quad -}$ .....

Sehingga,

$g^{-1}(4.100) = \sqrt{\quad -}$ .....

$g^{-1}(4.100) = \sqrt{\quad}$ .....

$g^{-1}(4.100) =$ .....

4 Periksa Kembali dan Simpulkan

Jadi, Tiara harus menyiapkan ..... ikatan bunga.

LIVEWORKSHEETS

MASALAH 9



Jika aplikasi ojek online di program dengan fungsi $g \circ f(x) = 10x + 9$ dengan x merupakan banyaknya bintang dan $(g \circ f)$ dalam ratus rupiah. Jika seorang driver ingin mendapat bonus sebesar $Rp.15.900{,}00$ maka tentukan berapa bintang yang harus di dapatkan seorang driver!

Penyelesaian:

1 Pahami Masalah

Diketahui:

Ditanya:

2 Rencanakan Penyelesaiannya

Jawab:

3 Laksanakan Penyelesaiannya

LIVEWORKSHEETS

Karena $(g \circ f)$ dalam ratus rupiah, sehingga:

4 **Periksa Kembali dan Simpulkan**



MASALAH 10

Untuk mencetak x eksemplar novel dalam sehari, diperlukan $f(x) = \frac{1}{500}(x + 100)$ unit mesin cetak. Padahal jika digunakan x unit mesin cetak, biaya perawatan harian yang harus dikeluarkan adalah $g(x) = 10x + 5$ (dalam ribuan rupiah). Jika pengeluaran untuk perawatan mesin hari ini sebesar $Rp.65.000{,}00$. Maka tentukan banyak eksemplar novel yang dicetak !



Penyelesaian:

1 **Pahami Masalah**

Diketahui:

Ditanya:

2 **Rencanakan Penyelesaiannya**

Jawab:

LIVEWORKSHEETS

3 Laksanakan Penyelesaiannya

Karena biaya perawatan harian yang harus dikeluarkan dinyatakan dalam rupiah, sehingga:

4 Periksa Kembali dan Simpulkan

LIVEWORKSHEETS

LATIHAN SOAL
FUNGSI INVERS

Kerjakan soal di bawah ini dengan teliti dan tepat!

1 Toni bekerja di bagian pengiriman barang dan memiliki sistem pemberian kode untuk mencatat berat bersih barang yang dikirim. Setiap berat barang dikurangi 3 kg untuk disesuaikan dengan kemasan, lalu hasilnya disimpan sebagai data digital. Misalnya, jika berat barang adalah x kilogram, maka data digitalnya disimpan sebagai $f(x) = x - 3$. Suatu hari, Toni hanya memiliki data digitalnya saja dan perlu mengetahui kembali berat asli barang tersebut. Tentukan aturan untuk menghitung berat barang asli dari data digital yang ada!

2 Seorang penjaga loket wahana bermain menggunakan aturan khusus untuk menetapkan harga tiket berdasarkan usia pengunjung. Harga tiket wahana ditentukan dengan rumus $f(x) = 2x + 1$ (dalam rupiah). Suatu hari, data yang tercatat hanya menunjukkan harga tiket yang dibayar, sedangkan usia pengunjung tidak dicatat. Penjaga loket ingin mengetahui kembali usia asli pengunjung dari data harga tiket tersebut. Tentukan rumus untuk menentukan usia pengunjung dari harga tiket yang dibayar!

3 Seorang teknisi laboratorium sedang mengkalibrasi alat pengukur suhu yang menampilkan hasil pengukuran suhu dalam bentuk rasio tertentu. Untuk suhu asli (dalam derajat Celcius), alat mengubah nilai tersebut menjadi $f(x) = \frac{2x+3}{2x}$ .Suatu ketika data suhu yang tercatat hanya berupa hasil olahan dari alat, yaitu nilai f(x), dan suhu asli x tidak diketahui. Teknisi ingin mencari rumus untuk mengetahui suhu asli dari hasil olahan alat tersebut. Tentukan rumus untuk mengetahui suhu asli dari data hasil alat kalibrasi tersebut!

LIVEWORKSHEETS

DAFTAR PUSTAKA

Dicky Susanto, dkk., Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI, Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementrian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Komplek Kemendikbudristek, Jakarta 2021

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. 2017. Buku Peserta didik Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Jakarta Pusat kurikulum dan perbukuan, Balitbang. Kemendikbud.

LIVEWORKSHEETS