

e-LKPD

MATEMATIKA

Nama: _____

Absen: _____

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

KELAS X

Sekolah : SMK 3 PGRI Sidoarjo
Mapel : Matematika
Materi : Eksponen
Sub Materi : Pertumbuhan dan
perluhan
Alokasi Waktu :

CP DAN PETUNJUK BELAJAR

Capaian Pembelajaran

- Memahami konsep fungsi eksponen serta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari
- Menganalisis masalah terkait pertumbuhan dan peluruhan eksponensial
- Menyelesaikan soal-soal kontekstual berbasis literasi matematika dengan berpikir kritis
- Menunjukkan sikap percaya diri dan tanggung jawab selama pembelajaran berlangsung

Petunjuk Belajar

1. Bacalah setiap petunjuk dan soal dengan saksama.
2. Tonton video atau dengarkan audio jika disediakan sebelum menjawab.
3. Kerjakan soal secara mandiri dan jujur.
4. Gunakan kalkulator jika diperlukan untuk menghitung hasil.
5. Jawaban otomatis diperiksa oleh sistem untuk soal objektif, dan secara manual oleh guru untuk soal uraian.

MATERI

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EKSPONEN

Eksponen dalam Kehidupan Sehari-hari



Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menjumpai situasi di mana suatu hal berkembang sangat cepat dalam waktu singkat. Misalnya, jumlah bakteri yang menggandakan diri setiap jam, pertumbuhan penduduk, atau nilai uang yang terus bertambah karena bunga majemuk di bank. Semua proses ini dapat dijelaskan menggunakan konsep eksponen.



Apa itu Eksponen?

Eksponen adalah bentuk pendek dari operasi perkalian berulang. Jika kita memiliki suatu bilangan dan kita mengalikan bilangan itu dengan dirinya sendiri beberapa kali, maka kita sedang melakukan operasi eksponen. Misalnya:



$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \text{ Sebanyak } (n) \text{ kali}$$

Keterangan :

a = bilangan pokok (basis), yakni bilangan yang dikalikan

n = bilangan pangkat (basis), yang menyatakan berapa kali bilangan a dikalikan dengan dirinya sendiri

Syarat umum dalam eksponen :

a = bilangan real

n = bilangan bulat positif

Pertumbuhan Eksponen



Pertumbuhan eksponen menggambarkan situasi ketika sesuatu meningkat dengan sangat cepat karena setiap penambahan waktu menyebabkan nilainya berkembang kelipatan dari nilai sebelumnya. Fungsi pertumbuhan eksponensial biasanya dituliskan sebagai berikut.

$$f(x) = a^x \text{ dengan } a > 1$$

Contoh :

Misalnya, jika sebuah bakteri membelah menjadi dua setiap jam, dan kita mulai dengan satu bakteri, maka jumlah bakteri setelah x jam adalah:

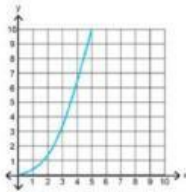
$$f(x) = 2^x$$

Pertumbuhan Eksponen

- Setelah 1 jam : $f(1) = 2^1 = 2$
- Setelah 2 jam : $f(2) = 2^2 = 4$
- Setelah 3 jam : $f(3) = 2^3 = 8$
- dan seterusnya.

Visualisasi konteks :

Grafik pertumbuhan eksponen memiliki bentuk kurva naik tajam, menunjukkan bahwa semakin lama waktu berjalan, semakin cepat nilai bertambah. Ini mencerminkan bahwa proses pertumbuhan eksponen bukan hanya cepat, tetapi semakin cepat dari waktu ke waktu.



Grafik pertumbuhan eksponen

Peluruhan Eksponen

Peluruhan Eksponen dalam Kehidupan Nyata

Pertumbuhan eksponen menggambarkan situasi ketika sesuatu meningkat dengan sangat cepat karena setiap penambahan waktu menyebabkan nilainya berkembang kelipatan dari nilai sebelumnya. Fungsi pertumbuhan eksponensial biasanya dituliskan sebagai berikut.

Peluruhan Eksponen

Peluruhan Eksponen dalam Kehidupan Nyata

Tidak semua hal dalam hidup kita bertambah. Banyak hal justru mengalami penurunan atau penyusutan. Misalnya, kadar obat dalam tubuh manusia akan terus berkurang seiring waktu, nilai barang elektronik menyusut setiap tahun, atau zat radioaktif mengalami peluruhan. Proses ini disebut peluruhan eksponensial.

Pengertian Peluruhan Eksponen

Peluruhan eksponensial adalah proses di mana suatu nilai menurun secara konsisten dan proporsional terhadap besar nilai itu sendiri. Artinya, semakin kecil nilainya, semakin lambat laju penurunannya. Fungsi peluruhan eksponen dapat ditulis sebagai berikut.

$$f(x) = n \times a^x \text{ dengan } 0 < a < 1$$

Keterangan :

n = Nilai Awal

a = Faktor peluruhan (berupa desimal/pecahan)

x = Waktu atau pengulangan

Contoh :

Sebuah obat memiliki kadar 100 mg di dalam tubuh. Setiap 2 jam, kadar ini berkurang menjadi setengahnya. Maka, kadar obat setelah xxx jam dapat dihitung dengan:

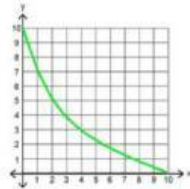
● Peluruhan Eksponen

$$f(x) = 100 \times (0,5)^x$$

- Setelah 2 jam: $f(1) = 100 \times 0,5^1 = 50$ mg
- Setelah 4 jam: $f(2) = 100 \times 0,5^2 = 25$ mg
- Setelah 6 jam: $f(3) = 100 \times 0,5^3 = 12,5$ mg
- Dan seterusnya.

Visualisasi konteks :

Grafik peluruhan eksponensial menunjukkan kurva turun yang melandai. Ini menunjukkan bahwa nilai berkurang dengan cepat di awal, namun lama-lama menjadi stabil mendekati nol.



Grafik peluruhan eksponen

Vidio Pendukung



Sebagai bahan pendukung materi. Silahkan perhatikan video di atas.

CONTOH SOAL

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

STUDI KASUS



Desa Cempaka adalah desa yang indah dan dikenal akan Sungai Gading yang mengalir jernih membelah perkampungan. Namun, beberapa bulan terakhir, warga desa mulai mengeluh. Air sungai yang biasanya jernih kini berubah warna menjadi agak keruh kekuningan. Bau menyengat kadang muncul, dan beberapa ikan yang dibudidayakan warga mulai mati tanpa sebab yang jelas.

Dinas Lingkungan Hidup kabupaten setempat segera turun tangan dan melakukan penelitian air sungai. Hasilnya mengejutkan: ternyata pencemaran disebabkan oleh zat kimia bernama ZC-91, yaitu limbah industri dari pabrik tekstil di hulu sungai yang mengalami kebocoran pembuangan. ZC-91 termasuk zat berbahaya bagi ekosistem air karena sifat racunnya yang tinggi. Namun, zat ini memiliki satu keunggulan: secara alami akan terurai (mengalami peluruhan) setiap 3 hari sebanyak setengah dari konsentrasinya karena reaksi sinar matahari dan bakteri air.



Laporan awal menunjukkan bahwa pada hari pertama pemeriksaan, konsentrasi ZC-91 di Sungai Gading sebesar 80 mg/L, jauh di atas batas aman yaitu 5 mg/L. Jika tidak segera ditangani, ekosistem Sungai Gading bisa rusak parah dalam beberapa minggu ke depan.



Andi, siswa SMK kelas X yang sedang belajar tentang fungsi eksponensial, penasaran apakah zat ZC-91 bisa berkurang secara alami tanpa intervensi tambahan. Ia memutuskan untuk melakukan perhitungan matematika dan menyampaikan temuannya kepada warga dan perangkat desa. Ia ingin menunjukkan bagaimana ilmu matematika bisa digunakan untuk memahami masalah lingkungan nyata.

Interpretasi

- 1 Tuliskan tiga informasi penting dari studi kasus narasi di atas yang dapat digunakan untuk membuat model matematika peluruhan!

Informasi penting yang didapatkan pada narasi di atas adalah:

- Konsentrasi awal zat ZC-91: 80 mg/L
- Zat berkurang setengahnya setiap 3 hari
- Batas aman: 5 mg/L

- 2 Berapa batas maksimal konsentrasi zat ZC-91 agar air dikatakan aman?

Batas maksimal konsentrasi zat agar air dikatakan aman adalah 5 mg/L

Analisis

- 3 Berdasarkan narasi di atas, bagaimana model matematika yang paling sesuai untuk menggambarkan peluruhan zat ZC-91?

$$f(x) = n \times a^x \text{ dengan } 0 < a < 1$$

Dengan:

n = Konsentrasi zat (80 mg/L)

a = pengurangan zat setiap 3 hari/siklus (0,5)

x = Waktu atau pengulangan siklus

Sehingga:

$$f(x) = 80 \times (0,5)^x$$

Evaluasi

- 4 Kira-kira pada hari ke berapa konsentrasi zat ZC-91 akan mencapai 5 mg/L atau kurang?

hari yang dibutuhkan agar konsentrasi zat ZC-91 mencapai 5 mg/L atau kurang, jika:

n = Konsentrasi zat (80 mg/L)

a = pengurangan zat setiap 3 hari/ 3 siklus (0,5)

Sehingga:

$$f(x) = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 5$$

Bagi kedua ruas dengan 80:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

Samakan bentuk pangkat:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Sehingga:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$x \geq 4$$

Karena 1 siklus = 3 hari, sehingga pada hari ke-12 batas maksimal konsentrasi dikatakan aman.

Inferensi

- 5 Apakah dalam 15 hari air Sungai Gading akan aman? Jelaskan alasanmu!

Dalam waktu 15 hari, zat ZC-91 telah berkurang cukup banyak dan konsentrasi air sungai sudah di bawah batas aman 5 mg/L, sehingga air Sungai Gading dapat dinyatakan aman untuk lingkungan.

SOAL LATIHAN

STUDI KASUS 1



Rina adalah siswi kelas X yang aktif berolahraga setiap pagi. Untuk menjaga daya tahan tubuhnya, ia mengonsumsi suplemen Vitamin C sebanyak 1000 mg setelah sarapan. Suatu hari, guru matematika menjelaskan bahwa kadar zat seperti vitamin dalam tubuh mengalami peluruhan eksponensial, yaitu menurun setengah setiap beberapa jam.

Rina pun penasaran: berapa lama kadar Vitamin C dalam tubuhnya bisa bertahan dalam batas aman?

Diketahui bahwa kadar Vitamin C dalam tubuh berkurang setengahnya setiap 4 jam karena metabolisme. Sementara itu, kadar terendah yang masih dianggap efektif dalam menjaga daya tahan tubuh adalah 125 mg.



Interpretasi

- 1 Tuliskan tiga informasi penting dari kasus Rina di atas yang bisa digunakan untuk membuat model matematika peluruhan.

Analisis

- 2 Berdasarkan narasi di atas, bagaimana model matematika yang paling sesuai untuk menggambarkan peluruhan vitamin C pada tubuh rani?

$$f(x) = n \times a^x \text{ dengan } 0 < a < 1$$

Dengan:

n = berat vitamin 100 mg

a = pengurangan kadar vitamin setiap 4 hari/ siklus sebesar 0,5

x = Waktu atau pengulangan siklus

Sehingga:

$$f(x) = 1000 \times (0,5)^x$$

Evaluasi

- 3 Berapa jam yang dibutuhkan agar kadar Vitamin C turun hingga 125 mg atau kurang?

Lama waktu yang diperlukan agar kadar vitamin C turun hingga 125 mg atau kurang adalah:

n = berat vitamin 100 mg

a = pengurangan kadar vitamin setiap 4 hari/ siklus sebesar 0,5

Sehingga:

$$f(x) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 125$$

Bagi kedua ruas dengan 1000:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{125}{1000}$$

Samakan bentuk pangkat:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{125}{1000}$$

Sehingga:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ \times \geq 3$$

Karena 1 siklus = 4 jam, sehingga lama waktu yang diperlukan agar kadar vitamin C turun hingga 125 mg atau kurang adalah 12 jam

Inferensi

- 4 Apakah kadar Vitamin C masih dalam batas efektif setelah 16 jam?

Karena kadar efektif vitamin C dalam menjaga tubuh sebesar 125 mg yang artinya di 12 jam pertama, maka setelah 16 jam vitamin C sudah tidak efektif lagi.