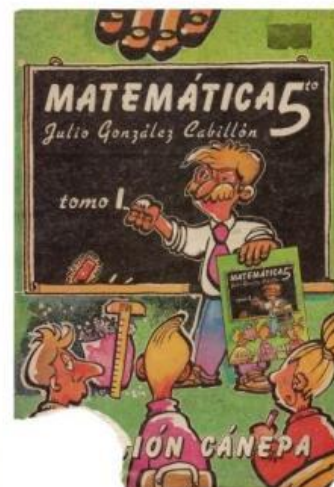


Par Ordenado



Karina, estudiante de Fundamentos I, debe preparar una clase sobre el par ordenado. Para ello, utiliza el libro Matemática 5, pero su ejemplar está en malas condiciones y algunas partes del texto están deterioradas. Ayúdala a completar el contenido con las palabras faltantes.



14. PAR ORDENADO.

Profesor: Creo que ha llegado el momento de considerar un concepto particularmente importante con el cual ustedes ya están familiarizados. Me refiero, concretamente, al concepto de **par ordenado**. ¿Lo recuerdan?...

Graciela: ¡Sí...! Yo, por ejemplo, lo relaciono con el juego de la «batalla naval».

Profesor: ¿Y con qué otros «juegos» matemáticos?

Mario: Con las funciones y sus gráficas...

Profesor: ¡Muy bien! ¿Y recuerdan cuál es la **propiedad fundamental de los pares ordenados**?

Pablo: ¿Propiedad fundamental?...

Profesor: Si dos pares ordenados son iguales, entonces ocurre, ¿qué cosa?...

Pablo: ¡Ah...! Que ambos pares tienen las mismas «abscisas» y las mismas **ordenadas**. Al igual que con los puntos!

Profesor: ¡Muy bien! Veamos la terminología usual.

Si a y b designan dos objetos matemáticos cualesquiera, el **par ordenado** asociado con a y b , se representa mediante el símbolo

(a, b)

donde a y b se denominan, respectivamente, **primer componente** y **segundo componente** del par ordenado.

Según el contexto matemático de que se trate, encontraremos, respectivamente, otras locuciones:

primera y segunda proyección,

primera y segunda coordenada,

y ordenada.

Llegado a este punto observo que aún no hemos dado una definición de par ordenado...

Ana (interrumpiendo): ¡Profesor! ¿No bastaría decir que

Un par ordenado es un par de conjuntos escritos en un **orden** definido?

Juan: Ana... ¿Cómo podés escribir un par de conjuntos, sin escribirlos en un orden definido? ¡En el **espacio** es imposible, y en el **tiempo**, también!...

Profesor: Sí, sí. Además, el «orden» mencionado por Ana no es un concepto que matemáticamente hayamos presentado oficialmente en sociedad. El adjetivo

Par Ordenado



«ordenado» que venimos empleando para los pares, tiene un carácter gramatical, y no matemático. Dicho adjetivo pretende recordarnos que

$$(a, b) \neq (b, a)$$

a menos -claro está- que a y b sean conjuntos

Por lo tanto, tenemos que esforzarnos un poco más en lograr una *definición* de par ordenado que satisfaga nuestra curiosidad conjuntista. Es decir, para cada par de conjuntos a y b deseamos construir un nuevo conjunto, simbolizado (a, b) que posea la *propiedad fundamental*:

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow$$

Andrea: ¿No podríamos *axiomatizar* la noción de par ordenado?

Profesor: Sí, de hecho es lo que hacen algunos, es decir, podríamos introducir el símbolo

$$(a, b)$$

como *primitivo* y admitir la propiedad fundamental como *axioma*.

Juan: Pero, de esta forma nos quedaríamos sin saber realmente lo que es un par ordenado. ¿No?...

Profesor: Es cierto. Intentemos, pues (*), dar una definición conjuntista. Después de todo estamos inmersos en el tema, y quizá valga la pena escuchar esta melodía, al menos, un día en la vida.

Obviamente, no podríamos definir

$$(a, b)$$

como

$$\{a, b\}$$

puesto que

$$\{a, b\} \neq \{b, a\}$$

y no se cumpliría la propiedad fundamental.

Además, ¿qué sentido hubiese tenido toda esta discusión?

Pero... ¿cómo dar una definición razonable de (a, b) ? ¡No es fácil!

(*) **Nota del autor:** Este «pues» deja entrever la posibilidad de satisfacer la inquietud de Juan. Nosotros, queremos dejar constancia que no estamos de acuerdo con el Profesor, porque creemos que la curiosidad de Juan no puede ser satisfecha tal como él lo desea. La *definición conjuntista*, propuesta más abajo por el Profesor, no cumple ninguna *finalidad ontológica*, ¡No logra establecer *qué es* realmente un *par ordenado*! Simplemente, proporciona un *modelo* para la interpretación intuitiva del concepto. Otros modelos son posibles... Entonces, ¿cómo y por qué dar preferencia a un modelo sobre otro? Y, aun cuando elijamos uno de ellos -como ha hecho el Profesor- ¿cómo puede él justificar que dicho modelo resuelve el problema ontológico?...

Par Ordenado



DEFINICIÓN

El par ordenado asociado con los conjuntos a y b (*sotto voce*: ¡en ese orden!) es el conjunto (a, b) definido por (*)

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Observen que

$$(a, b)$$

es, de acuerdo con esta definición, un conjunto cuyos elementos son los conjuntos

$$\{a\} \text{ y } \{a, b\}$$

Tal definición es, sin dudas, extravagante y no intuitiva, pero como veremos, resulta adecuada para demostrar el siguiente

TEOREMA (Propiedad fundamental de los pares ordenados)

Sean a, b, c , y d conjuntos cualesquiera. Se cumple:

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow (a = c \wedge b = d)$$

Demostración:

(*) **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980) Matemático polaco. Introdujo esta definición en 1921. Sin embargo, la primera *definición conjuntista* de par ordenado $(a, b) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$ fue dada en 1914, por el matemático estadounidense **Norbert Wiener** (1894-1964), fundador de la *Cibernética* en 1948. Estas definiciones desempeñaron un papel muy importante, pues permitieron incorporar el concepto matemático de relación a la *Teoría de Conjuntos*.