

MODUL AJAR KAPITA MATEMATIKA KETAKSAMAAN AM-GM DAN CAUCHY SCHWARZ

Informasi Umum

Nama Penyusun : Tidan Fadila F, Zulfin Nissa F.Z, Syifa' Fuady
L

Institutsi : UIN Raden Mas Said Surakarta

Tahun Penyusunan : 2024

Jenjang Sekolah : SMA/MA

Kelas : XI

Alokasi Waktu : 2×45 menit (2 JP)

Kompetensi Awal : Aljabar Dasar, Geometri Dasar

Profil Pelajar Pancasila dan Pelajar Rahmatan lil Alamin:

- Profil Pelajar Pancasila yang ingin dicapai adalah
 1. Beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa (mengajak peserta didik berdoa sebelum memulai pembelajaran dan bersyukur setelah selesai pembelajaran) dan berakhlak mulia (menumbuhkan sifat jujur dan bertanggung jawab peserta didik dalam menyelesaikan tugas).
 2. Bergotong royong (menumbuhkan rasa kekompakan dan bekerja sama peserta didik dalam berkolaborasi ketika berdiskusi dengan teman sekelompok).
 3. Bernalar kritis (menumbuhkan sifat bernalar kritis peserta didik dalam menyampaikan pendapat ketika berdiskusi maupun dalam waktu pembelajaran klasikal).
- Profil Pelajar Rahmatan lil Alamin yang ingin dicapai adalah
 1. Musyawarah
 2. Toleransi
- Sarana prasana :
 1. Ruang Kelas
 2. Power point

3. LKPD
4. Laptop
5. LCD
6. Buku Siswa
7. Youtube

Target Peserta Didik : Peserta didik reguler/umum

Model Pembelajaran : Problem Based Learning

Kompetensi Inti

A. Capaian Pembelajaran

Pada akhir Fase F, peserta didik dapat menyelesaikan masalah terkait polinomial, melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri. Mereka dapat memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus. Mereka dapat menyatakan vektor pada bidang datar, melakukan operasi aljabar pada vektor dan menggunakannya pada pembuktian geometris. Mereka dapat mengenal berbagai fungsi (selain fungsi linear dan fungsi kuadrat) dan menggunakannya untuk memodelkan fenomena, serta menyatakan sifat-sifat geometri dengan persamaan pada sistem koordinat. Mereka dapat mengevaluasi hasil keputusan dengan menggunakan distribusi peluang dengan menghitung nilai yang diharapkan, dan juga dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang.

B. Tujuan Pembelajaran

- 1.1 Peserta didik mampu mengerti konsep dan mampu menerapkan ketaksamaan AM-GM-CS untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika, terutama dalam konteks optimasi dan pembuktian.
- 1.2 Peserta didik mampu menjelaskan dengan bahasa sendiri makna dari ketaksamaan AM-GM-CS serta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.

C. Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- 1.1.1 Peserta didik mampu mendefinisikan dengan tepat rata-rata aritmatika, geometri, dan harmonik.
- 1.1.2 Peserta didik mampu membuktikan ketaksamaan AM-GM-CS dengan benar menggunakan berbagai metode.

- 1.1.3 Peserta didik mampu memecahkan soal-soal yang melibatkan penerapan ketaksamaan AM-GM-CS, baik soal-soal rutin maupun soal-soal non-rutin.
- 1.1.4 Peserta didik mampu menjelaskan langkah-langkah penyelesaian soal dengan runtut dan logis dan memberikan contoh penerapan ketaksamaan AM-GM-CS dalam konteks nyata

D. Pemahaman Bermakna

- Ketaksamaan AM-GM-CS memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, seperti fisika, ekonomi, dan ilmu komputer.
- Ketaksamaan AM-GM-CS dengan intuisi mereka tentang bilangan dan besaran.
- Ketaksamaan AM-GM-CS merupakan sebuah generalisasi dari konsep rata-rata.

E. Pertanyaan Pematik

- Apa yang dimaksud dengan ketaksamaan AM-GM itu?
- Apa yang dimaksud dengan ketaksamaan Cauchy Schwarz itu?

F. Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan Pendahuluan (10 menit)

1. Guru memberikan salam, mengajak siswa berdoa sebelum belajar, dan memeriksa kehadiran siswa.
2. Guru memberikan motivasi dan bertanya ada yang tau apa artinya pola?
3. Kemudian guru bertanya ada yang tau apa itu bilangan?
4. Guru menyampaikan tujuan pembelajaran yang akan dipelajari
5. Guru memberikan penjelasan mengenai manfaat belajar pola bilangan dalam kehidupan sehari-hari.
6. Guru meminta peserta didik untuk berkelompok yang terdiri dari 4- 6 peserta didik dalam satu kelompoknya.

Kegiatan Inti (60 menit)

1. Orientasi pada masalah

- a. Guru menyajikan masalah nyata yang relevan dengan kehidupan siswa dan dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep ketaksamaan AM, GM, dan CS.
- b. Peserta didik mengamati secara cermat dan dapat mengetahui pola barisan kemudian dapat mencari nilai barisan berikutnya dari barisan yang telah diketahui sebelumnya.
- c. Peserta didik mengajukan pertanyaan maupun pendapat dari masalah yang disajikan.

2. Organisasi Peserta Didik dalam kelompok

- a. Peserta didik dikelompokkan menjadi beberapa kelompok dengan disetiap kelompoknya beranggota 4-6 orang siswa
- b. Guru memberikan LKPD yang berisi petunjuk dan menyelesaikan masalah yang diberikan.
- c. Siswa berdiskusi dengan kelompoknya untuk mengidentifikasi masalah pada LKPD.
- d. Guru mendorong siswa untuk bertanya mengenai permasalahan

3. Membimbing penyelidikan dalam kelompok

- a. Siswa diberikan bimbingan dalam kelompoknya untuk mendiskusikan dan menganalisis masalah yang disajikan mengikuti contoh dan langkah yang ada didalam LKPD.
- b. Siswa diminta untuk melihat hubungan-hubungan berdasarkan informasi terkait permasalahan, dan siswa dapat mencari informasi materi dari berbagai sumber.
- c. Guru mengamati pekerjaan siswa dalam kelompok dan memberikan bantuan apabila siswa merasa kesulitan.

4. Menyajikan hasil

- a. Guru meminta siswa menyiapkan lembar hasil diskusi kelompok dan meminta perwakilan kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusi didepan kelas.

5. Menganalisis dan mengevaluasi

- a. Guru memberikan kesempatan kepada kelompok lain untuk menanggapi dan bertanya.
- b. Siswa menganalisa masukan dari kelompok lain.
- c. Guru melibatkan siswa mengevaluasi jawaban kelompok presenter serta memberikan masukan dari kelompok lain dan membuat kesimpulan dari hasil diskusi kelompok.
- d. Guru dan siswa memberikan kesempatan untuk bertanya apabila masih ada yang belum dipahami.
- e. Guru mengumpulkan semua hasil diskusi kelompok.

Kegiatan Penutup (20 menit)

1. Guru dan siswa menyimpulkan pembelajaran hari ini.
2. Refleksi pencapaian siswa/asesmen formatif, dan refleksi guru untuk mengetahui ketercapaian proses pembelajaran dan perbaikan.
3. Guru memberikan informasi kegiatan yang akan dilakukan dan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

4. Guru mengakhiri kegiatan belajar dengan memberikan pesan dan motivasi kemudian diakhiri dengan berdoa dan salam.

G. Asesmen

- Diagnosis (Terlampir)
- Formatif (Terlampir)
- Summatif (Terlampir)

H. Pengayaan dan Remedial

- Pengayaan

1. Pengayaan diberikan untuk menambah wawasan peserta didik mengenai materi pembelajaran, yang dapat diberikan kepada peserta didik yang telah tuntas mencapai KKM (70)
2. Pengayaan dapat ditagihkan atau tidak ditagihkan, sesuai kesepakatan dengan peserta didik
3. Bentuk pengayaan dapat dilakukan secara berkelompok maupun individu dengan diberikan penugasan. Jenis tugas yang diberikan berupa permasalahan yang memuat kemampuan berpikir tingkat tinggi/ HOTS

- Remedial

1. Remedial dapat diberikan kepada peserta didik yang belum mencapai KKM (70)
2. Peserta didik yang belum menguasai materi akan dijelaskan kembali oleh pendidik, pendidik akan melakukan penilaian kembali dengan soal yang sejenis. Remedial dilaksanakan pada waktu dan hari tertentu yang disesuaikan contoh: pada saat jam belajar, apabila masih ada waktu, atau di luar jam pelajaran (30 menit setelah jam pelajaran selesai).

I. Glosarium

- Ketaksamaan: Pernyataan matematis yang menunjukkan hubungan perbandingan antara dua ekspresi matematika, seperti lebih besar dari, lebih kecil dari, atau sama dengan.

- Rata-rata Aritmatika (AM): Jumlah semua nilai dalam suatu kumpulan data dibagi dengan banyaknya nilai.
- Rata-rata Geometri (GM): Akar pangkat n dari hasil kali n buah bilangan.
- Rata-rata Harmonik (HM): Kebalikan dari rata-rata aritmatika dari kebalikan nilai-nilai dalam suatu kumpulan data.
- Ketaksamaan AM-GM: Ketaksamaan yang menyatakan bahwa rata-rata aritmatika dari sekumpulan bilangan non-negatif selalu lebih besar dari atau sama dengan rata-rata geometrinya.
- Ketaksamaan Cauchy-Schwarz: Ketaksamaan yang memberikan batas atas untuk hasil kali dalam dari dua vektor.

J. Daftar Pustaka

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press.

Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press

Senin, 02 Desember 2024

Mengetahui,

Mahasiswa,

NIM.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Materi

Matematika ketaksamaan merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari hubungan antara dua nilai, apakah satu nilai lebih besar, lebih kecil, atau sama dengan nilai lainnya. Ketaksamaan memiliki aplikasi luas di berbagai bidang, termasuk matematika, fisika, ekonomi, dan ilmu komputer.

- Ketaksamaan AM

Ketaksamaan AM-GM menyatakan bahwa rata-rata aritmetika sekumpulan bilangan non-negatif selalu lebih besar atau sama dengan rata-rata geometri dari bilangan yang sama. Rumusnya sebagai berikut: Untuk bilangan non-negatif $a_1, a_2, \dots, a_n$, berlaku AM-GM: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 * a_2 * \dots * a_n}$.

Persamaan AM-GM terjadi ketika semua bilangan yang terlibat sama, yaitu $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz menyatakan bahwa kuadrat dari dot product dua vektor tidak lebih besar dari hasil kali kuadrat dari norma kedua vektor tersebut.

Rumusnya sebagai berikut:

Untuk vektor u dan v , berlaku $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$, dimana $\cdot$ adalah dot product dan $\| \cdot \|$ adalah norma vektor

Persamaan Cauchy-Schwarz terjadi ketika vektor u dan v adalah kelipatan skalar satu sama lain.

Aplikasi Ketaksamaan Cauchy-Schwarz:

1. Dalam bidang geometri dapat digunakan untuk menentukan batas atas dan bawah untuk panjang segmen garis, luas segitiga, dan volume bangun ruang.
2. Dalam materi aljabar ketaksamaan ini dapat digunakan untuk membuktikan pertidaksamaan aljabar, seperti pertidaksamaan AM-GM.
3. Dalam bidang analisis ketaksamaan ini dapat digunakan untuk membuktikan konvergensi barisan dan deret, dan mengestimasi nilai integral.

ASESMEN DIAGNOSTIK
NON KOGNITIF (GAYA BELAJAR PESERTA DIDIK)

A. Petunjuk Pengerjaan

1. Baca dengan seksama uraian kuisisioner dibawah ini
2. Pilih salah satu jawaban a / b/ c sesuai dengan kecenderungan anda

B. Naskah Soal

KUISISIONER A	
Nama Peserta Didik	: ...
Absen	: ...
Kelas	: ...
KUISISIONER	PILIHAN JAWABAN
1. Pada waktu belajar untuk Penilaian atau Ulangan Harian, Penilaian tengah semester dan Penilaian akhir semester apakah anda memilih: a. membaca catatan, membaca judul dan sub-judul dalam buku, dan melihat diagram dan ilustrasi b. meminta seseorang memberi pertanyaan, atau menghafal dalam hati sendirian c. membuat catatan pada kartu dan membuat model atau diagram	
2. Apa yang kalian lakukan sewaktu anda mendengarkan musik? a. berkhayal (melihat benda-benda yang sesuai dengan musik yang sedang didengarkan) b. berdendang mengikuti alunan musik tersebut c. bergerak mengikuti musik tersebut, mengetukkan kaki mengikuti irama, dsb	

3. Pada waktu kalian sedang memecahkan masalah,apakah anda : a. membuat daftar, mengatur langkah, dan mengeceknya setelah langkah itu dikerjakan b. menelpon teman atau ahli untuk membicarakan masalah tersebut c. menguraikan (menganalisa) masalah itu atau melakukan semua langkah yang anda pikirkan	
4. Jika kalian membaca untuk sekedar hiburan ,apakah kalian memilih: a. buku perjalanan dengan banyak gambar di dalamnya b. cerita misteri yang penuh dengan percakapan di dalamnya c. buku yang dapat menjawab pertanyaan dan memecahkan masalah anda	
5. Untuk mempelajari bagaimana kerja komputer,apakah anda memilih : a. menonton film tentang cara kerja computer b. mendengarkan seseorang menjelaskan cara kerja komputer c. membongkar komputer dan mencoba menemukan sendiri cara kerjanya	
6. Anda baru saja memasuki museum ilmu pengetahuan,seperti taman pintar, Tekno park, dll apa yang anda lakukan pertama kali? a. melihat sekeliling dan menemukan peta yang menunjukkan lokasi berbagai benda yang dipamerkan b. berbicara dengan penjaga museum dan bertanya kepadanya tentang benda-benda yang dipamerkan c. melihat pada benda pertama yang kelihatan menarik, dan barukemudian membaca petunjuk lokasi benda-benda lainnya	
7. Jenis restoran atau rumah makan apa yang anda tidak sukai? a. restoran yang lampunya terlalu terang b. restoran yang musiknya terlalu keras c. restoran yang kursinya tidak nyaman	
8. Seandainya anda berada pada suatu acara pesta,entah pernikahan atau yang lainnya,apa yang akan kira – kira paling anda ingat pada keesokan harinya? a. muka orang-orang dalam pesta, tetapi bukan namanya b. nama orang-orang dalam pesta, tetapi bukan mukanya c. sesuatu yang anda lakukan dan katakan selama dalam pesta	
9. Apa yang paling mengganggu bagi kalian pada waktu anda mencoba untuk berkonsentrasi? a. gangguan visual b. suara gaduh c. gangguan lainnya seperti rasa lapar, sepatu yang sempit, atau rasa khawatir	
10. Apa yang kira – kira kalian lakukan ,jika anda sedang antre untuk menonton Bioskop? a. melihat-lihat pada poster iklan film lainnya b. berbicara dengan orang di sebelah anda c. mengetukkan kaki atau berjalan ke arah lain	

Lembar Analisis dan Rekomendasi

Nama Peserta Didik	: ...	
Absen	: ...	
Kelas	: ...	
Skor yang diperoleh :	Jumlah jawaban A	: ...
	Jumlah Jawaban B	: ...
	Jumlah Jawaban C	: ...
Kesimpulan Hasil Tes dan Rekomendasi		
Apabila jawaban yang paling banyak adalah A	Anda dengan kecenderungan gaya belajar visual akan mencapai prestasi belajar yang optimal apabila memanfaatkan kemampuan visual Anda. Anda dapat membuat sendiri peta konsep atau ringkasan materi perkuliahan.	
Apabila jawaban yang paling banyak adalah B	Anda memiliki kecenderungan gaya belajar auditori. Anda yang memiliki kecenderungan gaya belajar auditori akan mencapai prestasi belajar yang optimal apabila Anda mempelajari materi perkuliahan dari mendengarkan baik melalui penjelasan langsung dari dosen, diskusi dengan dosen dan teman mahasiswa, maupun melalui rekaman materi yang sedang dipelajari.	

Apabila jawaban yang paling banyak adalah C	Anda memiliki kecenderungan gaya belajar kinestetik. Anda dengan gaya belajar kinestetik akan mencapai prestasi belajar secara optimal apabila Anda terlibat langsung secara fisik dalam kegiatan belajar. Anda dapat mengutak-atik atau memanipulasi materi perkuliahan atau media yang digunakan dalam menjelaskan materi perkuliahan.
Apabila jawaban A dan B sama banyak	Anda memiliki gabungan gaya belajar visual dan auditori. Ada hal tertentu yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar visual, dan ada hal lain yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar auditori. Bahkan, kadang jika kedua gaya belajar digunakan, akan lebih optimal.
Apabila jawaban A dan C sama banyak	Anda memiliki gabungan gaya belajar visual dan kinestetik. Ada hal tertentu yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar visual, dan ada hal lain yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar kinestetik. Bahkan, kadang jika kedua gaya belajar digunakan, akan lebih optimal.
Apabila jawaban B dan C sama banyak	Anda memiliki gabungan gaya belajar auditori dan kinestetik. Ada hal tertentu yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar auditori, dan ada hal lain yang Anda akan belajar efektif jika menggunakan gaya belajar kinestetik. Bahkan, kadang jika kedua gaya belajar digunakan, akan lebih optimal.

ASESMEN FORMATIF

A. Petunjuk Pengerjaan

1. Baca dengan seksama uraian kuisioner dibawah ini
2. Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan jawaban yang tepat

B. Naskah Soal

1. Pak Budi adalah seorang petani yang ingin mengukur luas kebunnya berbentuk persegi panjang. Panjang kebun tersebut adalah z meter dan lebar kebun tersebut adalah y meter. Pak Budi ingin mengetahui apakah rata-rata dari panjang dan lebar kebun lebih besar atau sama dengan akar kuadrat dari hasil perkalian panjang dan lebar kebun.

Diketahui bahwa panjang kebun $z = 6$ meter dan lebar kebun $y = 12$ meter. Pak Budi ingin mengetahui apakah ketaksamaan berikut berlaku:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

2. Ibu Siti memiliki tiga jenis tanaman yang ia jual di pasar: tanaman tomat, cabai, dan terong. Setiap minggu, penghasilan dari setiap jenis tanaman berbeda-beda. Pada minggu lalu, Ibu Siti menghasilkan $a = 50$ ribu dari tomat, $b = 60$ ribu dari cabai, dan $c = 80$ ribu dari terong. Ibu Siti ingin mengetahui apakah rata-rata penghasilannya lebih besar atau sama dengan penghasilan yang diperoleh dari hasil perkalian ketiga penghasilannya

Bantu ibu Siti dengan membuktikan apakah ketaksamaan berikut:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{ABC}$$

3. Rina dan Dedi berlatih lari di lapangan yang memiliki panjang 400 meter. Mereka mencatat waktu tempuh masing-masing di tiga putaran pertama. Rina mencatat waktu 60 detik untuk putaran pertama, 62 detik untuk putaran kedua, dan 61 detik untuk putaran ketiga. Dedi mencatat waktu 65 detik untuk putaran pertama, 66 detik untuk putaran kedua, dan 64 detik untuk putaran ketiga.

Mereka ingin membandingkan kecepatan rata-rata mereka dalam tiga putaran. Namun, Rina dan Dedi juga tertarik untuk mengetahui apakah ketaksamaan Cauchy-Schwarz berlaku antara waktu tempuh mereka

Bantu Rina dan Dedi dengan menghitung dan membuktikan apakah ketaksamaan Cauchy-Schwarz berikut berlaku untuk vektor $a = (60, 62, 61)$ dan $b = (65, 66, 64)$:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Kunci jawaban:

$$1. \frac{x+y}{2} = \frac{6+12}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{6 \times 12} = \sqrt{72} \approx 8.49$$

Jadi,

$$\frac{x+y}{2} = 9 \geq 8.49 = \sqrt{xy}$$

Karena $9 \geq 8.49$, ketaksamaan ini berlaku

Kesetaraan terjadi jika $x = y$, namun dalam hal ini $x \neq y$, jadi ketaksamaan ini lebih besar

$$2. \frac{a+b+c}{3} = \frac{50+60+80}{3} = \frac{190}{3} \approx 63.33$$

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{50 \times 60 \times 80} = \sqrt[3]{240000} \approx 62.47$$

Karna $63.33 \geq 62.47$, ketaksamaan ini berlaku.

$$3. \text{ Sisi kiri } (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 60 \times 65 + 62 \times 66 + 61 \times 64 \\ &= 3900 + 4092 + 3904 = 10996 \end{aligned}$$

$$\text{Sisi kiri adalah: } 10996^2 = 120931201$$

$$\text{Sisi kanan: } (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 3600 + 3844 + 3721 = 11665$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = 4225 + 4356 + 4096 = 12677$$

$$\text{Jadi, sisi kanan: } 11665 \times 12677 = 148353905$$

$$\text{Karna } 120931201 \leq 148353905$$

Ketaksamaan cauchy-schwarz berlaku untuk vektor a dan b

ASESMEN SUMATIF

A. Petunjuk Pengerjaan

1. Baca dengan seksama uraian kuisisioner dibawah ini
2. Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan jawaban yang tepat

B. Naskah Soal

1. Misalkan $x, y, z > 0$ dan diketahui $x + y + z = 3$ Buktikan bahwa:
$$xyz \leq 1$$
2. Buktikan bahwa untuk semua bilangan real positif a, b, c berlaku:
$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c)^2$$

Kunci jawaban:

1. $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

Karena $x + y + z = 3$ maka:

$$1 \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$1 \geq xyz$$

Jadi terbukti bahwa $xyz \leq 1$

2. $(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c)^2$
 $(a^2 + b^2 + c^2)(3) \geq (a + b + c)^2$
 $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

TERBUKTI