



UNIVERSITAS
PGRI MADIUN

Lembar Kerja Mahasiswa

Materi : Transformasi Geometri

Disusun oleh :
Alfi Nur Hani'ah

1

Tujuan Pembelajaran

1. Memahami konsep transformasi geometri (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi).
2. Mampu menerapkan transformasi geometri dalam menyelesaikan masalah.

2

Petunjuk Belajar

1. Berdo'a sejenak sebelum memulai pembelajaran.
2. Sebelum mengerjakan soal, pastikan Anda sudah memahami konsep dasar transformasi geometri.
3. Pastikan setiap langkah pengerjaan dijelaskan dengan jelas dan rinci.

Transformasi Geometri

Transformasi geometri adalah perubahan posisi dan ukuran suatu benda atau objek pada bidang geometri seperti garis, titik, maupun kurva.

Jenis-Jenis Transformasi Geometri

1. Translasi

Translasi adalah perpindahan posisi suatu objek. Jika dinyatakan dalam koordinat Cartesius, translasi merupakan perpindahan titik-titik koordinat suatu objek ke arah dan jarak tertentu.

Persamaan umum translasi

Jika titik P yang memiliki koordinat (x, y) ditranslasikan sejauh (a, b) , akan dihasilkan titik P' dengan koordinat (x', y') .

$$P(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'((x + a), (y + b))$$

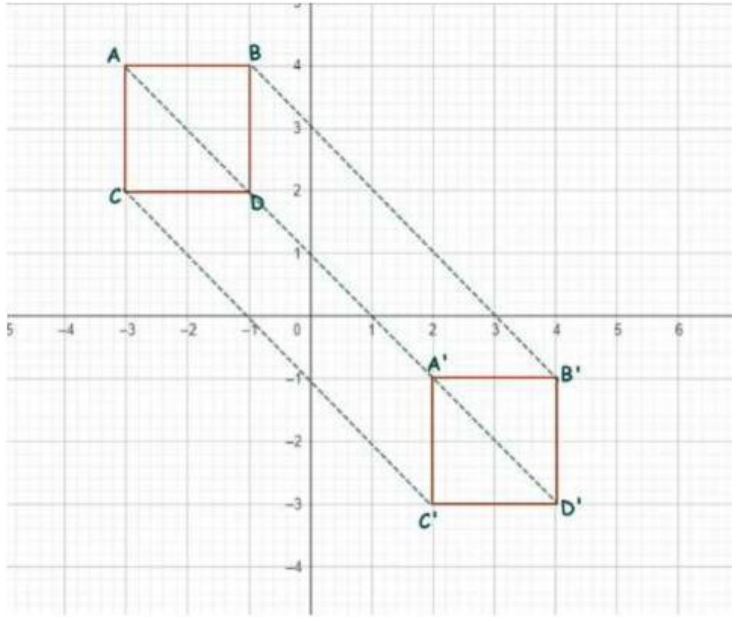
Dengan :

$P(x, y)$ = koordinat titik awalnya;

a = pergeseran pada sumbu- x ;

b = pergeseran pada sumbu- y ; dan

$P((x + a), (y + b))$ = koordinat akhir setelah pergeseran.



Gambar di atas menunjukkan bahwa suatu bangun persegi $ABCD$ mengalami translasi atau pergeseran hingga berada di posisi persegi $A'B'C'D'$.

Dari hasil pengamatan, diperoleh bahwa bangun persegi $ABCD$ bergeser 5 satuan ke arah sumbu- x positif ($a = 5$) dan 5 satuan ke arah sumbu- y negatif ($b = -5$).

- Koordinat $A = (-3, 4)$
- Koordinat $B = (-1, 4)$
- Koordinat $C = (-3, 2)$
- Koordinat $D = (-1, 2)$

- Koordinat akhir bangun persegi $A'B'C'D'$.

$$A(-3, 4) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)} A'(2, -1)$$

$$B(-1, 4) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)} B'(4, -1)$$

$$C(-3, 2) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)} C'(2, -3)$$

$$D(-1, 2) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)} D'(4, -3)$$

2. Refleksi

Refleksi atau pencerminan adalah perpindahan titik suatu objek pada bidang sesuai dengan sifat pembentukan bayangan pada cermin datar.

Persamaan umum refleksi

Refleksi bisa dilakukan terhadap sumbu- x maupun sumbu- y . Pada refleksi ini, sumbu- x atau sumbu- y bisa dianalogikan sebagai cermin.

Refleksi terhadap sumbu- x

Jika direfleksikan terhadap sumbu- x , maka koordinat y' merupakan lawan dari koordinat y dengan koordinat x tetap.

$$P(x, y) \xrightarrow{M_x} P'(x, -y)$$

$$\Leftrightarrow M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dengan :

$P(x, y)$ = titik koordinat awal

$P'(x, -y)$ = titik koordinat akhir

M_x = matriks pencerminan terhadap sumbu- x

Refleksi terhadap sumbu- y

Jika direfleksikan terhadap sumbu- y , maka koordinat x' merupakan lawan dari koordinat x dengan koordinat y tetap.

$$P(x, y) \xrightarrow{M_y} P'(-x, y)$$

$$\Leftrightarrow M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan :

$P(x, y)$ = titik koordinat awal

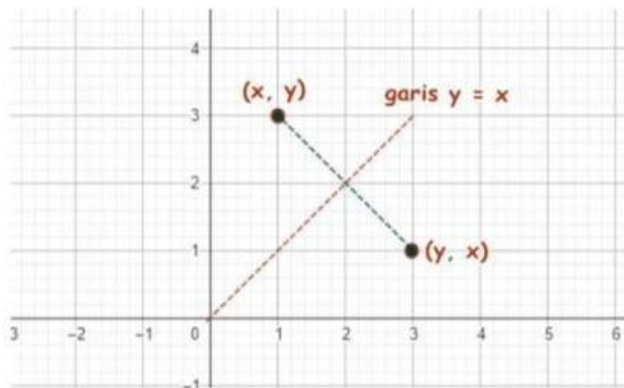
$P'(-x, y)$ = titik koordinat akhir

M_y = matriks pencerminan terhadap sumbu- y

Refleksi terhadap garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $x = h$, dan garis $y = k$.

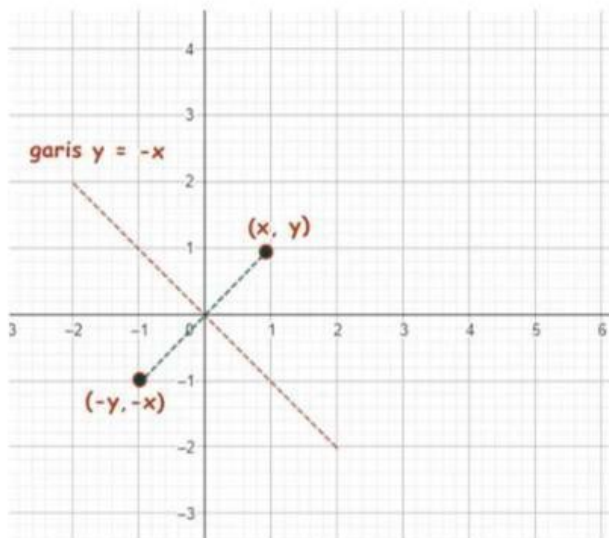
Refleksi terhadap garis $y = x$

Jika suatu titik P dengan koordinat (x, y) direfleksikan terhadap garis $y = x$ akan dihasilkan koordinat $P' (y, x)$.



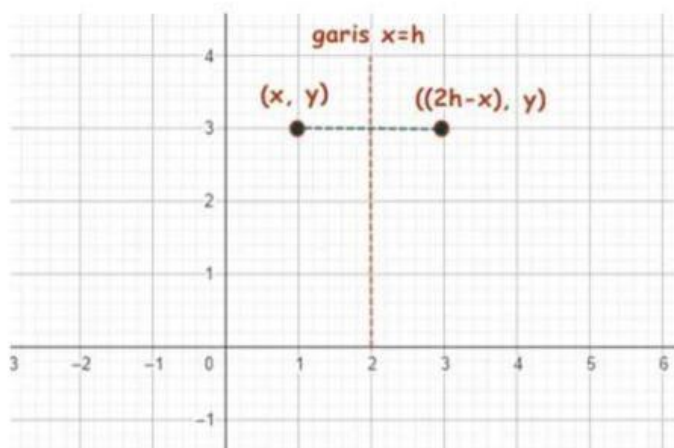
Refleksi terhadap garis $y = -x$

Jika suatu titik P dengan koordinat (x, y) direfleksikan terhadap garis $y = -x$ akan dihasilkan koordinat $P' (-y, -x)$.



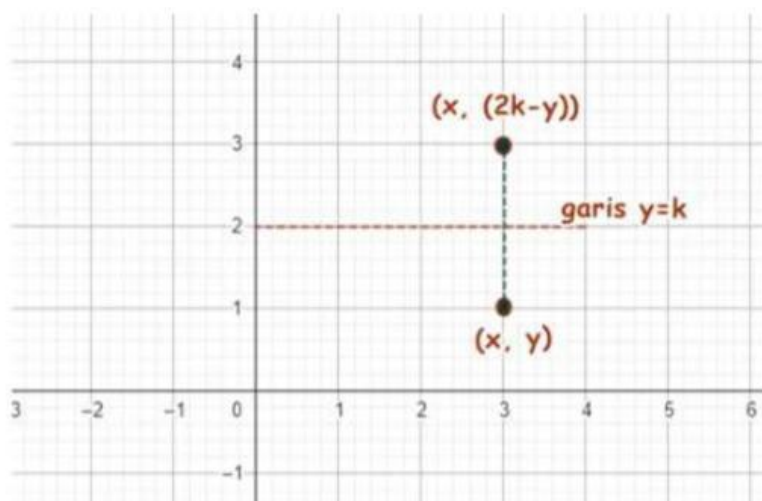
Refleksi terhadap garis $x = h$

Jika titik P dengan koordinat (x, y) direfleksikan terhadap garis $x = h$ akan dihasilkan koordinat $P' ((2h - x), y)$.



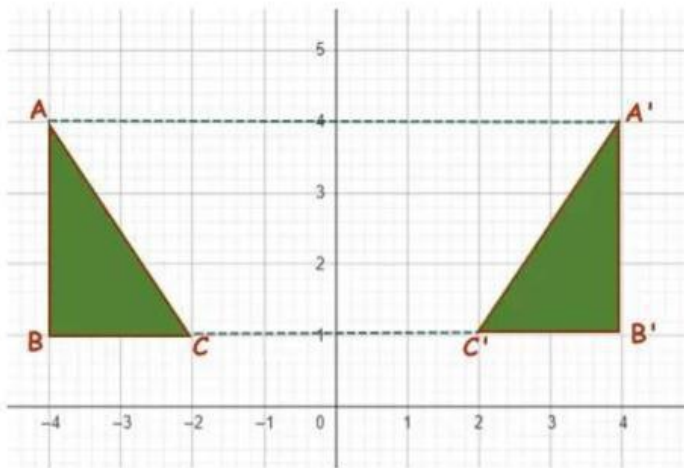
Refleksi terhadap garis $y = k$

Refleksi titik $P(x, y)$ terhadap garis $y = k$ akan menghasilkan koordinat $P'(x, (2k - y))$.



Contoh refleksi

segitiga siku-siku ABC yang direfleksikan terhadap sumbu- y . Jika dicerminkan terhadap sumbu- y , maka koordinat (x, y) menjadi $(-x, y)$.



$$P(x, y) \xrightarrow{M_y} P'(-x, y)$$

$$\Leftrightarrow M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinat titik $A = \{-4, 4\}$

$$A(-4, 4) \xrightarrow{M_y} A'(-(-4), 4)$$

$$\Leftrightarrow A(-4, 4) \xrightarrow{M_y} A'(4, 4)$$

Koordinat titik $B = \{-4, 1\}$

$$B(-4, 1) \xrightarrow{M_y} B'(-(-4), 1)$$

$$\Leftrightarrow B(-4, 1) \xrightarrow{M_y} B'(4, 1)$$

Koordinat titik $C = \{-2, 1\}$

$$C(-2, 1) \xrightarrow{M_y} C'(-(-2), 1)$$

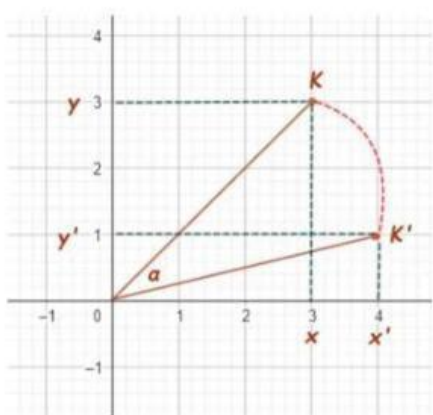
$$\Leftrightarrow C(-2, 1) \xrightarrow{M_y} C'(2, 1)$$

3. Rotasi

Rotasi adalah perpindahan titik-titik suatu objek pada bidang geometri dengan cara memutarnya sejauh sudut α .

Secara umum, rotasi dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut.

- *Rotasi terhadap titik pusat $(0, 0)$*



Titik K dirotasi sejauh α melalui titik pusat $(0, 0)$, hingga berada di posisi K' .

Secara matematis, persamaan rotasi yang melalui titik pusat dinyatakan sebagai berikut.

$$K(x, y) \xrightarrow{R[O(0,0), \alpha]} K'(x', y')$$

Untuk menentukan titik bayangan objek yang dirotasi terhadap pusat $(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika titik M berada di koordinat $(4, -2)$, lalu titik tersebut dirotasi berlawanan dengan arah putaran jarum jam sejauh 90° terhadap titik pusat $(0, 0)$, tentukan letak bayangannya!

Pembahasan :

Titik M dirotasi sejauh 90° berlawanan dengan arah putaran jarum jam terhadap titik pusat $(0, 0)$. Secara matematis, bisa dinyatakan sebagai berikut.

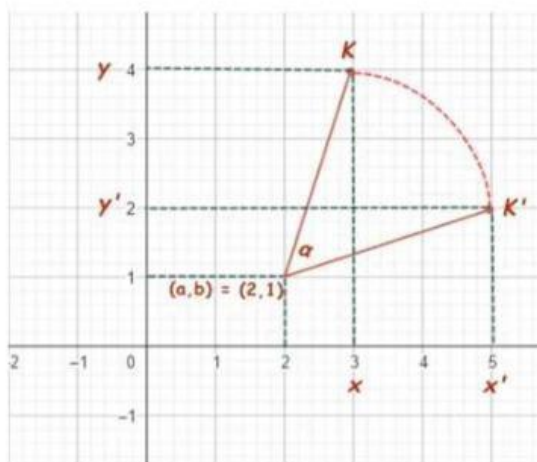
$$M(4, -2) \xrightarrow{R[O(0,0), 90^\circ]} M'(x', y')$$

Koordinat bayangannya bisa kamu tentukan dengan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi koordinat $M' = \{2, 4\}$

- Rotasi terhadap titik pusat (a, b)



titik K dirotasi sejauh α melalui titik pusat $(2, 1)$, hingga berada di posisi K' . Secara matematis, persamaan rotasi yang melalui titik pusat (a, b) dinyatakan sebagai berikut.

$$K(x, y) \xrightarrow{R[(a,b), \alpha]} K'(x', y')$$

Untuk menentukan titik bayangan objek yang dirotasi terhadap pusat (a, b) , gunakan persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

4. Dilatasi

Dilatasi adalah perpindahan titik-titik suatu objek terhadap titik tertentu berdasarkan faktor pengali.

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Secara umum, dilatasi dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut.

1. Dilatasi terhadap titik pusat $(0, 0)$

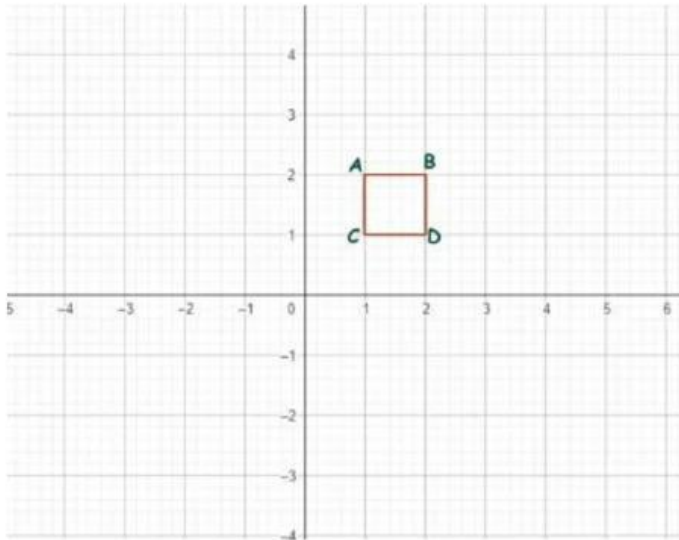
Jika suatu titik $M(x, y)$ mengalami dilatasi terhadap titik pusat $(0, 0)$ dengan faktor pengali k , maka akan dihasilkan koordinat $M'(x', y')$.

$$M(x, y) \xrightarrow{D[(0,0),k]} M'(x', y')$$

Titik koordinat $M'(x', y')$ bisa ditentukan dengan rumus berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh



Jika bangun tersebut didilatasi terhadap titik pusat $(0,0)$ dan faktor pengali -2 , tentukan hasil bayangannya!

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan dahulu koordinat akhir setiap titik pada bangun setelah didilatasi.

Titik $A' \rightarrow A(1, 2)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian, $A'(-2, -4)$.

Titik $B' \rightarrow B(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, $B' (-4, -4)$.

Titik $C' \rightarrow C (1, 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, $C' (-2, -2)$.

Titik $D' \rightarrow D (2, 1)$

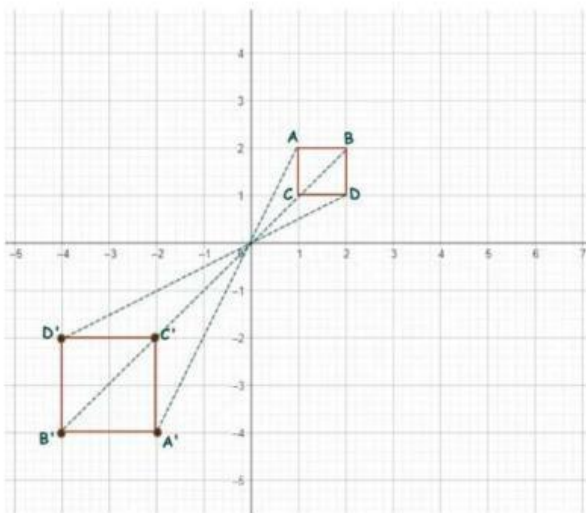
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, $D' (-4, -2)$

Jika digambarkan pada koordinat Cartesius



2. Dilatasi terhadap titik pusat (a, b)

Jika dilatasi titik koordinat $M(x, y)$ dilakukan terhadap titik pusat (a, b) dengan faktor pengali k , maka akan dihasilkan koordinat $M'(x', y')$.

Secara matematis, bisa dinyatakan sebagai berikut.

$$M(x, y) \xrightarrow{D[(a,b),k]} M'(x', y')$$

Titik koordinat $M'(x', y')$ bisa ditentukan dengan rumus berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Ayo Amati



- Perhatikan pola formasi awal penari (misalnya, lingkaran, segitiga, atau garis).
- Apakah formasi berubah selama tarian? Jika ya, sebutkan jenis perubahan (rotasi, translasi, refleksi).
- Gambarkan pola formasi awal dalam kotak berikut:

(Gambar pola formasi awal di sini)