

3° de Secundaria Matemáticas

Jueves 11 de febrero

Volumen de prismas y del cilindro recto

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

Énfasis: Dar sentido y significado a la variación de alguna de las dimensiones del volumen en prismas y cilindros.

¿Qué vamos a aprender?

Estudiarás el cálculo del volumen de prismas con diferentes bases y el cilindro recto para conocer qué ocurre con el volumen al aumentar o disminuir algunas dimensiones de los cuerpos geométricos.

Los materiales que vas a utilizar es tu cuaderno de apuntes, bolígrafo, lápiz y goma.

Anota en tu cuaderno los apuntes que consideres necesarios.

Los cuerpos geométricos están presentes en la vida diaria: desde el recipiente que contiene la leche o el empaque de un chocolate; en las botellas de múltiples productos o los envases para guardar los alimentos.

También los cuerpos geométricos se emplean para contener petróleo y gas; en los electrodomésticos y hasta en las albercas.

Como puedes observar, hay una gran variedad y todos ellos comparten ciertas características, además de fórmulas para calcular su capacidad o volumen.

Estas fórmulas permiten anticipar cómo cambia su volumen al transformar sus dimensiones.

¿Qué hacemos?

Comienza con los prismas.

El nombre de un prisma se asigna por la figura que tienen sus bases.



Si sus bases son triángulos, se trata de un prisma triangular. Pero si su base tiene 5 vértices, se trata de un prisma pentagonal. O si se habla de un prisma que lo forman 8 aristas laterales, es un prisma octagonal.

Cuando sus bases son círculos y su cara lateral es un rectángulo, entonces el cuerpo geométrico es un cilindro.

Realiza la siguiente actividad.

Imagina el cuerpo geométrico que se te describe con las siguientes características. Esto para comparar las respuestas y saber si se habla del mismo.

Tiene 6 caras cuadradas, pero no se trata de un cubo que tiene 6 caras iguales. Tiene 18 aristas en total. Las bases son diferentes a las caras laterales. Y cada base tiene 6 vértices. ¿Qué cuerpo geométrico es? ¿Con cuántas pistas identificaste el cuerpo geométrico?

Prisma hexagonal



Tiene:
6 caras laterales cuadradas
18 aristas en total

Bases:
6 vértices cada una
Son diferentes a las caras laterales

Si tu respuesta fue un prisma hexagonal, estás en lo correcto: tiene 6 caras laterales cuadradas, 18 aristas en total; sus bases tienen 6 vértices cada una y las bases son diferentes a las caras laterales.

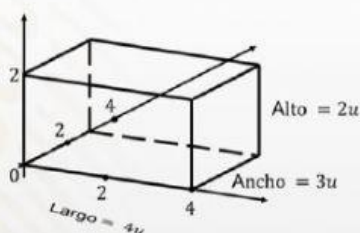
Antes de empezar con el cálculo del volumen, ¿sabías que a sus unidades de volumen se les llama cúbicas?

Esto es porque al partir de un cubo en donde sus tres dimensiones son iguales tanto largo, ancho y alto, al

multiplicarlas se obtiene: lado por lado por lado, igual a lado a la tercera potencia, es decir, lado al cubo.

Por lo tanto, a las unidades que se usan en el volumen se les denomina **cúbicas**, como metro cúbico, decímetro cúbico, centímetro cúbico, entre otras.

Caja de galletas



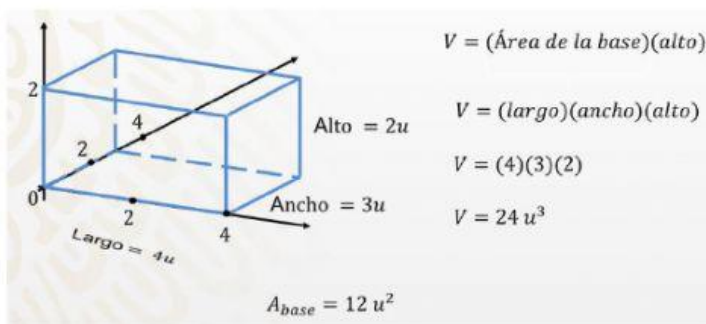
Ahora, considera una caja de galletas con forma de prisma rectangular. De ésta se quiere calcular su volumen y sus dimensiones son las siguientes:

De largo mide cuatro unidades, de ancho tres unidades y de alto dos unidades.

Calcula el número de cubos que caben en la base del prisma. Por ejemplo, si acomodas 4 de largo en 3 hileras —que es lo que mide de ancho el prisma—, y obtienes en la base 12 cubos.

Repite este procedimiento una vez más porque tiene una altura de 2 unidades, entonces se sostiene que el volumen de esta caja de galletas es de 24 unidades cúbicas.

Se concluye numéricamente que el volumen es igual al producto del área de la base por la altura. Es decir, largo por ancho por alto, que es igual a 4 por 3 por 2 igual a 24 unidades cúbicas.



Así se comprueba que, en ambos casos, el cálculo del volumen es igual.

Ahora analiza qué ocurre con el volumen de este prisma, si la altura de la caja de galletas fuera mayor. Si partes de la fórmula de volumen —que es área de la base por altura—, y conoces que el área de la base se mantiene en 12 unidades cuadradas. ¿Cuál es el volumen de una caja con una altura del doble? Es decir, de 4 unidades y otra caja con una altura de 12 unidades.

Largo	Ancho	Área	Alto	Volumen	
4	3	$12 u^2$	2	$24 u^3$	
4	3	$12 u^2$	4	$48 u^3$	Doble del primero
4	3	$12 u^2$	12	$144 u^3$	6 veces del primero



¿Observaste algún patrón en los resultados del volumen? Analiza:

Se tienen las tres cajas con la misma base y sólo cambia la altura. Por lo tanto, si la altura de la segunda caja aumentó el doble de la primera, el volumen también aumenta de 24 a 48 unidades cúbicas, el doble.

En el segundo caso, se observa que la altura aumentó seis veces la del original. Por lo tanto, el volumen también se modificó 6 veces, es decir, 24 por 6 que son 144 unidades cúbicas.

Al analizar la tabla, se observa una constante que es el área de la base. Para estos tres cuerpos geométricos, sólo cambias una de sus dimensiones que es la altura.

Hasta aquí ya calculaste el volumen para un prisma rectangular con variables de una dimensión, como la altura.

Pero ¿qué ocurre con los prismas que tienen otra figura como base? ¿Se cambia la fórmula para calcular el volumen si tienes otro tipo de base? ¿Qué pasa si la base ahora es un círculo?

Para contestar estas preguntas, en el siguiente video del minuto 02:05 al 03:52 se muestran prismas con diferentes figuras en la base, hasta llegar al cilindro.

1. Volumen de conos y cilindro

https://www.youtube.com/watch?v=pVDY_dBeLhE

Se puede concluir que, para calcular el volumen de cualquier prisma y cilindro, sólo debes multiplicar el área de la base por la altura.

Ahora continua con la actividad 2.

Se quiere conocer el volumen que contiene una caja de chocolate con forma de prisma hexagonal con una altura de 12 cm, de lado 4 cm y una apotema de 3.4 cm.

¿Cómo calcularías el volumen?

$$V = \text{Área de la base (A)} \times \text{altura (h)}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{P(a)}{2}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{(\boxed{} \times \boxed{})(\boxed{})}{2}$$

$$\text{Área de la base} = \boxed{} \text{ cm}^2$$

$$V = \boxed{} \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm}$$

$$V = \boxed{} \text{ cm}^3$$



Si se analizan los dos problemas, el cálculo requirió otros elementos porque las bases son diferentes y la fórmula del área cambia. Después de ese cálculo sólo hay que multiplicar por la altura.

Si el fabricante indica que cada tablilla que contiene la caja tiene una altura de 1 cm.

¿Qué volumen tendrá una caja con diferentes alturas?

Área de la base (cm^2)	Altura	Volumen (cm^3)
40.8	1	cm^3
40.8	2	cm^3
40.8	4	cm^3
40.8	6	cm^3
40.8	12	489.6 cm^3
40.8	20	cm^3

Para la caja de 4 tablillas se multiplica 40.8 por 4, igual a 163.2 cm cúbicos. Para la segunda presentación se multiplica 40.8 por 6, igual a 244.8 cm cúbicos. Para la edición especial se multiplica 40.8 por 20, igual a 816 cm cúbicos.

Conociendo el área de la base, para calcular el volumen sólo se multiplica el área por la altura solicitada, pero no es la única forma de realizarlo.

Si conoces el volumen del prisma, es posible calcular el de las nuevas presentaciones, a través de determinar la relación entre las alturas.

Se revisas los datos de la tabla anterior para realizar ahora los cálculos, partiendo del volumen que tenía una altura de 12 cm.

Si la primera altura solicitada representa la tercera parte del original, entonces se divide el volumen original de 489.6 entre 3, que es igual a 163.2 cm cúbicos.

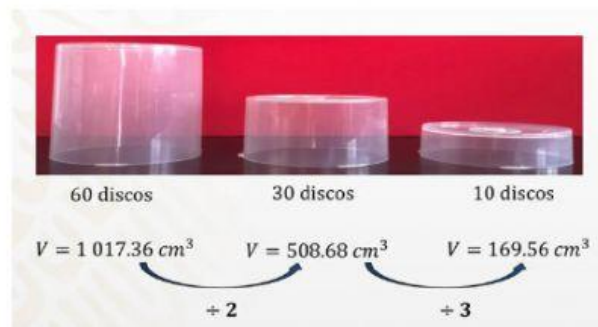
Para la segunda altura observas que es la mitad de la primera. Por lo tanto, se divide 489.6 entre 2, igual a 244.8 cm cúbicos.

En la edición especial se observa que la altura es mayor a la altura original y no es múltiplo de ella. Pero el 20 —al ser múltiplo de 4, ya que 4 por 5 es 20—, se puede multiplicar al volumen de la altura de 4 que es 163.2 por 5, teniendo 816 cm cúbicos.

En las dos tablas se obtiene el mismo valor del volumen.

Se concluye que es directamente proporcional la altura con el volumen, siempre y cuando la base no se modifique.

Ahora analizarás qué pasa con el cilindro.



Tienes unos contenedores para discos que tienen una capacidad para 10, 30 y 60 piezas. Cada disco mide 6 cm de radio y 1.5 mm de alto.

¿Cuál es el volumen de cada contenedor?

Calcula el área de la base

$$\text{Área} = \pi r^2 = \pi 6^2 = \boxed{} \text{ cm}^2$$

Área de la base (cm^2)	Altura	Volumen (cm^3)
113.04 cm^2	10 (1.5 mm) = cm	cm^3
113.04 cm^2	30 (1.5 mm) = cm	cm^3
113.04 cm^2	60 (1.5 mm) = cm	cm^3

Se conoce el volumen del contenedor mayor, que mide 1 017.36 cm cúbicos, con una altura de 60 discos. Se calcula el volumen del segundo contenedor con 30 discos, siguiendo el razonamiento que trabajaste con el prisma. Al ser la mitad de la altura, se divide el volumen entre 2 porque se conserva la misma base, y obtener 508.68 cm cúbicos.

Para el contenedor con 10 discos realizas la división del volumen, partiendo del segundo contenedor, el cual es la tercera parte. Se divide 508.68 entre 3, igual a 169.56 cm cúbicos.

Como “dato relevante”: en el caso del cilindro, también existe una relación de proporcionalidad directa entre la altura del cilindro y el volumen, siempre y cuando tengan la misma medida en la base.

Sólo te falta por analizar: ¿qué pasa con el volumen si la medida de la base cambia? ¿Se mantendrá la misma relación de proporcionalidad?

Analiza estas preguntas con la cuarta y última actividad.

Continúa trabajando con tus contenedores de discos, pero ahora cambia el diámetro del disco, ya que algunos son contenedores para disco de cámara de video, discos para computadora o para discos de vinilo.

¿Cuál es el volumen de los tres contenedores, si se quieren almacenar tres grupos de discos con una altura de 10cm?



¿Qué relación existe entre el volumen y la variación de la base?

En esta actividad se tienen los siguientes datos: la altura de los tres contenedores es la misma de 10 cm; el radio de cada disco es el que cambia. En el disco para cámara de video, su radio mide 3 cm. El disco para computadora tiene un radio de 6 cm. Y el disco de vinilo grande tiene un radio de 15 cm.

Altura (cm)	Radio	Área cm^2	Volumen (cm^3)
10 cm	3 cm	cm^2	cm^3
10 cm	6 cm	cm^2	cm^3
10 cm	15 cm	cm^2	7,065 cm^3

Con estos datos se calcula el volumen de los contenedores.

Para ello, se inserta la información en una tabla.

En la tabla observas que la altura de los contenedores se mantiene constante, y que tanto el valor de los radios como el área de la base y el volumen aumentaron.

Disco	Radio cm	Área de la base cm^2	Altura cm	Volumen cm^3
	3	28.26	10	282.6
	6	113.04	10	1 130.4
	15	706.5	10	7 065

Relationships shown with arrows:

- Radio: 3 to 6 is $\times 2$; 6 to 15 is $\times 5$.
- Area: 28.26 to 113.04 is $\times 4$; 113.04 to 706.5 is $\times 25$.
- Volumen: 282.6 to 1 130.4 is $\times 4$; 1 130.4 to 7 065 is $\times 25$.

Del primer disco al segundo, el aumento del radio es al doble. El área de su base se hizo 4 veces mayor por el efecto de elevar al cuadrado el radio. Al ser la altura una constante en ambos, el volumen entonces es 4 veces mayor.



Es decir, 2 al cuadrado es 4; 28.26 por 4 es 113.04 y en el caso del volumen, al multiplicar 282.6 por 4, es 1 130.4 cm cúbicos.

Al comparar el primer disco con el tercero, se observa que el radio es 5 veces mayor. Con la consideración anterior —que el radio aumenta al cuadrado—, tienes 5 al cuadrado es 25. Por lo que el área de la base es 25 veces mayor.

Se comprueba: el área de 28.26 del primer disco por 25 es igual a 706.5, y en el volumen es 282.6 por 25, igual a 7 065 cm cúbicos.

Otro “dato relevante”: la relación entre el radio y el volumen final no es directamente proporcional —porque el radio es elevado al cuadrado para obtener el área de la base— por lo que si las dimensiones de la base se duplican, y la altura se conserva constante, el volumen será 4 veces mayor.

Si el radio se triplica, y la altura del cilindro es constante, el volumen será 9 veces mayor.

En conclusión: con una altura constante y un radio que aumenta proporcionalmente, el volumen aumenta un número de veces equivalente al cuadrado del aumento del radio.

Con las cuatro actividades se analizó el cálculo del volumen en prismas y cilindros, que, de modo general, se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

Con la particularidad de que el área de la base depende de la figura geométrica que corresponda.

También se analizó el cambio del volumen al aumentar o disminuir una dimensión del cuerpo geométrico, como la altura que tiene una relación de proporcionalidad directa con el volumen, conservando la misma base.

Mientras que cuando cambia el área de la base, que tiene dos dimensiones (largo y ancho), por ejemplo, el radio de un cilindro, el número de veces que es mayor que otro, se eleva al cuadrado para saber cuántas veces el volumen se incrementa, siempre y cuando la altura sea constante.