3. ROTASI (PERPUTARAN)

Amati gambar dibawah ini!

Pembahasan rotasi atau perputaran banyak kita temukan dikehidupan sehari hari contohnya Komedi putar, gangsing, kipas angin, dan jarum jam merupakan beberapa contoh objek yang bergerak dengan berputar.

Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik–titik dengan cara memutar titik–titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu. Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :

- **Titik pusat rotasi**
- **Besar sudut rotasi**
- **Arah sudut rotasi**

Sudut rotasi merupakan sudut antara garis yang menghubungkan titik asal dan pusat rotasi yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi.

Jika arah rotasi diputar searah jarum jam maka besar sudut rotasi negatif ($-\alpha$).

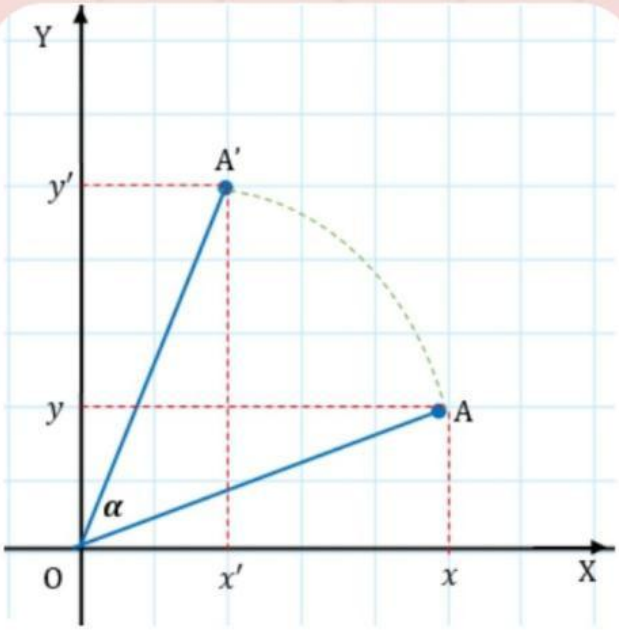
Jika arah rotasi diputar berlawanan jarum jam maka besar sudut rotasi poitif (α)

Rotasi dinotasikan dengan $R(P,\alpha)$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

LIVEWORKSHEETS

ROTASI TERHADAP TITIK PUSAT (0,0)

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat (0, 0) dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (0, 0) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LIVEWORKSHEETS

Contoh 1

Tentukan bayangan titik $C(3, 1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar 90° dan berpusat (0, 0)!

Pembahasan:

Koordinat titik C (3, 1) akan dirotasikan $R\,[O(0,0), 90°]$

$$C(3,1) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90°]}} C'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(-1, 3)$

Contoh 2

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar 180° terhadap titik pusat (0, 0). Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),180°]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -x \rightarrow x = -x'$

$y' = -y \rightarrow y = -y'$

Substitusi $x = -x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

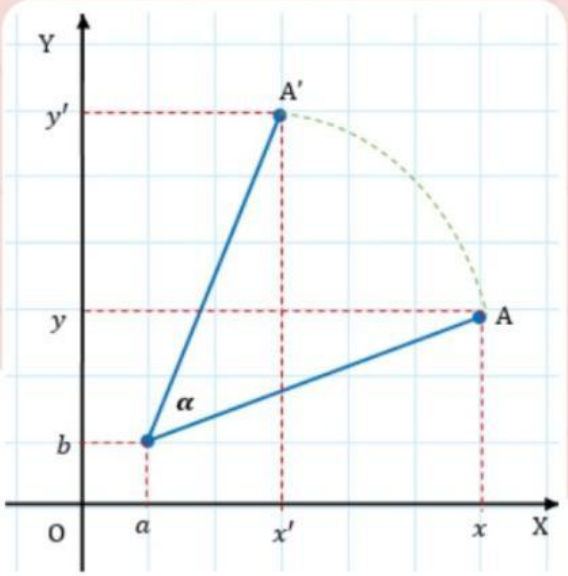
$$3(-x') - 4(-y') + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x + 4y + 12 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 12 = 0$

LIVEWORKSHEETS

ROTASI TERHADAP TITIK PUSAT (a, b)

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat (a, b) dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(a,b),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

LIVEWORKSHEETS

Contoh 1

Tentukan bayangan titik C (3, 1) jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar 90° dan berpusat (2, 4)!

Pembahasan:

Koordinat titik $C(3,1)$ akan dirotasikan $R\,[(2,4),90°]$

$$C(3,1) \xrightarrow{R_{[(2,4),90°]}} C'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(4,5)$

Contoh 2

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar 180° terhadap titik pusat (1, 2). Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[(1,2),180°]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(x-1) \\ -1(y-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1+2 \\ -y+2+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ -y+4 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -x + 3 \rightarrow x = 3 - x'$

$y' = -y + 4 \rightarrow y = 4 - y'$

Substitusi $x = 3 - x'$ dan $y = 4 - y'$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(3 - x') - 4(4 - y') + 12 = 0$$
$$9 - 3x' - 16 + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 9 - 16 + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 5 = 0$$
$$-3x + 4y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 5 = 0$

LIVEWORKSHEETS

LATIHAN

LIVEWORKSHEETS