

BAB III

MATRIKS

A. Pengertian Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah susunan unsur-unsur atau bilangan yang terdiri dari baris dan kolom yang berbentuk persegi atau persegi panjang yang biasanya diletakkan di dalam kurung biasa () atau kurung siku [] dan dilambangkan dengan huruf capital.

1. Beberapa Pengertian dan Istilah dalam Matriks

a. Pengertian baris, kolom, dan elemen sebuah matriks

- 1) Baris suatu matriks adalah susunan bilangan yang dituliskan mendatar (horizontal) dalam matriks.
- 2) Kolom suatu matriks adalah susunan bilangan yang dituliskan tegak atau vertical dalam matriks.
- 3) Elemen suatu matriks adalah bilangan-bilangan yang menyusun matriks.

b. Pengertian Ordo matriks, jenis matriks, transpose matriks

- 1) Pengertian Ordo Matriks
 - a) Ordo suatu matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom yang terdapat dalam matriks tersebut. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka ordo matriks A adalah $m \times n$ dan ditulis $A_{m \times n}$.

- b) Banyaknya unsur dari suatu matriks ditentukan oleh hasil kali banyak baris dengan banyak kolom dari matriks yang bersangkutan.

- 2) Jenis matriks
 - a) Matriks baris, yaitu matriks yang hanya terdiri dari satu baris.

Misalnya : $A = (1 \ 3 \ 5)$

- b) Matriks kolom, yaitu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Misalnya : $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
- c) Matriks persegi, matriks yang mempunyai baris dan kolom sama banyak atau matriks yang berordo $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Misalnya : $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

- d) Matriks segitiga

(1) Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang setiap elemen diatas diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Misalnya : $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang setiap elemen dibawah diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Misalnya : $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

- e) Matriks diagonal, matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai nol, kecuali pada diagonal utama.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- f) Matriks Identitas, matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- g) Matriks tegak, matriks dengan banyak baris lebih banyak dibandingkan dengan banyak kolom.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Misalnya : $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

- h) Matriks datar, matriks dengan banyak kolom lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Misalnya : G :

- i) Matriks simetris, matriks persegi dengan elemen pada baris ke- i kolom ke- j sama dengan elemen pada baris ke- j kolom ke- i .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Misalnya : M =

- j). Transpose suatu matriks

Transpose suatu matriks diperoleh dengan cara susunan baris suatu matriks diubah menjadi kolom dan sebaliknya. Transpose matriks A dinyatakan A^T atau A^T .

$$\text{Misalnya: } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{maka } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- 3). Kesamaan matriks

Dua matriks dikatakan sama jika dan hanya jika ordonya sama dan unsur unsur yang seletak bernilai sama

$$\text{Misal matriks } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan} \\ B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\text{Jika } A = B \text{ maka } a = p \\ b = q \\ c = r \\ d = s$$

Lakukan !

Kegiatan individu

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kali kita jumpai masalah untuk menampilkan data atau informasi dalam bentuk daftar atau table. Berikut ini adalah data banyaknya hewan peliharaan yang dimiliki oleh beberapa warga di suatu desa.

1. Pak budi mempunyai ayam 10 ekor, itik 20 ekor, dan kambing 5 ekor.
2. Pak ~~Joko~~ mempunyai kambing 2 ekor, ayam 20 ekor, dan itik 20 ekor.
3. Pak Hasan mempunyai itik 10 ekor, ayam 50 ekor, dan kambing 3 ekor.

4. Pak Karto mempunyai kambing 4 ekor, ayam 5 ekor, dan itik 50 ekor.

Permasalahan :

- a) Nyatakan data atau informasi tersebut ke dalam tabel
- b) Tulislah matriks yang diperoleh
- c) Tentukan banyak baris dan kolom pada pertanyaan b)
- d) Sebutkan elemen-elemen pada baris pertama, kedua, ketiga dan keempat.
- e) Sebutkan elemen-elemen pada kolom pertama, kedua dan ketiga.
- f) Sebutkan elemen pada baris ketiga kolom pertama.

Contoh Soal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Diketahui matriks $A =$

 - a) Tentukan baris pertama, baris kedua, dan baris ketiga beserta elemen-elemen pada baris-baris tersebut.
 - b) Tentukan kolom pertama, kolom kedua dan kolom ketiga beserta elemen-elemen pada kolom-kolom tersebut.
 - c) Tentukan elemen baris kedua kolom kedua dan elemen baris ketiga kolom kedua.

Jawab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- a). - Baris pertama dengan elemen-elemen 1,2 dan 3
- Baris kedua dengan elemen-elemen 2, 5 dan 6
- Baris ketiga dengan elemen-elemen 7, 8 dan 9

$$\text{b). } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & \square & \square \end{bmatrix}$$

klm1 klm2 klm3

- Kolom 1 dengan elemen-elemen 1, 4 dan 7
- Kolom 2 dengan elemen-elemen 2, 5 dan 8

- Kolom 3 dengan elemen-elemen 3, 6 dan 9

c). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & \mathbf{8} & 9 \end{bmatrix}$

- Elemen baris kedua dan kolom kedua adalah 5
- Elemen baris ketiga dan kolom kedua adalah 8

2. Tentukan ordo dan banyaknya elemen dari matriks-matriks berikut !

a) $A = (-4 \ 1 \ 2)$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jawab :

- a) Banyak baris matriks A ada 1 dan kolom matriks A ada 3, maka ordo matriks A adalah 1×3 serta banyaknya elemen ada $1 \times 3 = 3$
- b) Banyak baris matrik A ada 3 dan kolom matriks A ada 1, maka ordo matriks A adalah 3×1 serta banyaknya elemen ada $3 \times 1 = 3$

3. Tentukan transpose dari matriks-matriks berikut !

a) $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Jawab :

$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

baris pertama pada matriks P diubah menjadi kolom pertama pada matriks P^T dan baris kedua pada matriks P diubah menjadi kolom kedua pada matriks P^T .

jadi $P^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Dengan cara yang sama pada jawaban

$Q^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

4. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$

Jika matriks A sama dengan matriks B, tentukan nilai a dan b.

Jawab :

- Matriks A berordo 2×2 dan matriks B berordo 2×2 , jadi ordo matriks A sama dengan matriks B, ini berarti syarat perlu untuk kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat cukup untuk kesamaan matriks A dan B adalah semua elemen yang seletak harus bernilai sama.

$A = B$
 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$

$3 = 2a \quad \textcircled{R} \quad a = \frac{3}{2}$
 $9 = 3b \quad \textcircled{R} \quad b = \frac{9}{3} = 3$

Video Pembelajaran

Uji Kompetensi 1

Jawablah soal-soal berikut dengan singkat dan tepat !

1. Tabel dibawah ini menunjukkan jarak antara dua kota dalam kilometer (km)

	Medan	Padang	Palembang	Lampung
Medan	0	367	428	675
Padang	367	0	115	308
Palembang	428	115	0	327
Lampung	675	308	327	0

- a) Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolom, tulislah matriks yang diperoleh
b) Berapa banyak baris dan kolom pada soal a)
c) Sebutkan elemen-elemen pada baris kedua
d) Sebutkan elemen baris ketiga kolom ketiga.
2. Tentukan ordo matrik berikut ini !

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = (-1 \ 5 \ 7)$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

3. Tentukan transpose dari matriks-matriks berikut !

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. Diketahui matriks $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

- a) Tentukan transpose matriks R
b) Tentukan $(R^T)^T$
c) Periksalah apakah $(R^T)^T = R$

5. Tentukan nilai x dan y pada kesamaan matriks berikut !

a)
$$\begin{pmatrix} 2x+1 & 4 \\ 2 & 2y+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} x^2+x & -2 \\ -1 & y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 27 \end{pmatrix}$$

6. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut !

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-2x & 5 \\ -1 & 2-y \end{pmatrix}$$

- a) Tentukan transpose dari matriks B
b) Jika $B^T = A$, tentukan nilai x dan y

UJI KOMPETENSI AKHIR

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat !

1. Diketahui matriks A =
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Matriks satuan yang mempunyai ordo sama

dengan A adalah

a.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 c.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 d.
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e.
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Di antara matriks-matriks berikut, yang termasuk matriks simetris adalah

a.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 d.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
 e.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

c.
$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Jika matriks B =
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Transpos dari matriks B adalah

a.
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
 b.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
 d.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

e.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & x-y \end{pmatrix}$ dan

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{2} \\ -2y & 3 \end{pmatrix}$$

Jika $A = B$, maka nilai $x + y = \dots$

- a. -2
- b. -1
- c. 0
- d. 1
- e. 2

5. $\begin{pmatrix} x-y & 2x-1 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 4y-3 & x+y \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 88 & 50 \\ -94 & 14 \end{pmatrix}$$

Nilai $x - y = \dots$

- a. -7
- b. -11
- c. 21
- d. 37
- e. 43