



Matematika Peminatan

Eksponensial dan Logaritma

Membahas tentang bentuk eksponensial, fungsi dan grafik fungsi eksponensial, persamaan dan pertidaksamaan eksponensial. Bentuk dan sifat logaritma, fungsi dan grafik fungsi logaritma, persamaan dan pertidaksamaan logaritma serta implikasinya dalam kehidupan sehari-hari

**Kelas X
Semester I**

Kompetensi Dasar		Indikator Pencapaian Kompetensi
4.1. Mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keberkaitanannya		<p>3.1.1 Menentukan nilai fungsi eksponensial.</p> <p>3.1.2 Melukis grafik fungsi eksponensial dengan persamaan $y = a^x$.</p> <p>3.1.3 Menentukan fungsi eksponensial dari grafik yang disajikan.</p> <p>3.1.4 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $a^{f(x)} = a^p$.</p> <p>3.1.5 Menentukan Himpunan penyelesaian persamaan eksponensial $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.</p> <p>3.1.6 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $a^{f(x)} = b^{f(x)}$.</p> <p>3.1.7 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.</p> <p>3.1.8 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $H(x)^{f(x)} = H(x)^{g(x)}$</p> <p>3.1.9 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$</p> <p>3.1.10 Menentukan Himpunan Penyelesaian persamaan eksponensial $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$</p> <p>3.1.11 Menentukan Himpunan Penyelesaian pertidaksamaan eksponensial.</p> <p>3.1.13 Menentukan nilai fungsi Logaritma.</p> <p>3.1.14 Melukis grafik fungsi logaritma.</p> <p>3.1.15 Menentukan fungsi logaritma dari grafik yang disajikan.</p> <p>3.1.16 Menentukan himpunan penyelesaian persamaan logaritma bentuk $\log_a f(x) = \log_a p$</p> <p>3.1.17 Menentukan himpunan penyelesaian persamaan logaritma bentuk $\log_a f(x) = \log_b f(x)$</p> <p>3.1.18 Menentukan himpunan penyelesaian persamaan logaritma bentuk $\log_a f(x) = \log_a g(x)$</p> <p>3.1.19 Menentukan himpunan penyelesaian persamaan logaritma bentuk $\log_a f(x) = \log_b g(x)$</p> <p>3.1.20 Menentukan himpunan penyelesaian persamaan logaritma bentuk $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$</p> <p>3.1.21 Menentukan himpunan penyelesaian eksponensial berbentuk $A(\log_a f(x))^2 + B(\log_a f(x)) + C = 0$</p> <p>3.1.22 Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan logaritma.</p>
4.1 Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.		<p>4.1.1 Menyelesaikan permasalahan pertumbuhan menggunakan konsep fungsi eksponensial.</p> <p>4.1.2 Menyelesaikan permasalahan peluruhan menggunakan konsep fungsi eksponensial dan fungsi logaritma</p> <p>4.1.3 Menyelesaikan permasalahan rangkaian listrik menggunakan konsep fungsi eksponensial.</p> <p>4.1.4 Menyelesaikan permasalahan nilai modal setelah periode n menggunakan konsep fungsi eksponensial.</p>

EKSPOENSIAL

1. Bentuk Eksponensial

Konsep

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Dengan : a = Bilangan pokok
 n = Bilangan pangkat/eksponen

Contoh 1.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125}$$

Sifat Bilangan Eksponensial.

Dengan $a > 0$ dan $a \neq 0$

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a. $a^n \times a^m = a^{n+m}$ | f. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |
| b. $a^n \div a^m = a^{n-m}$ | g. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ |
| c. $(a^n)^m = a^{n.m}$ | h. $a^0 = 1$ |
| d. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ | |
| e. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | |

2. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial f dengan bilangan pokok a adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan real x ke a^x dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ dan ditulis sebagai :

Bentuk pemetaan : $f: x \rightarrow a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ atau

Bentuk formula : $f(x) = a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Contoh 2.

Diberikan $f(x) = 2^{2x-1}$, carilah nilai dari $f(2)$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Jawab :

$$\begin{aligned}f(2) &= 2^{2 \cdot 2 - 1} & f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \\f(2) &= 2^3 & f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2^0 \\f(2) &= 8 & f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1\end{aligned}$$

3. Grafik Fungsi Eksponensial

Ingatkah ananda bagaimana cara melukis grafik fungsi? Ya, pertama kita bikin dulu tabelnya, setelah itu lukiskan koordinat-koordinatnya.

Contoh 3.

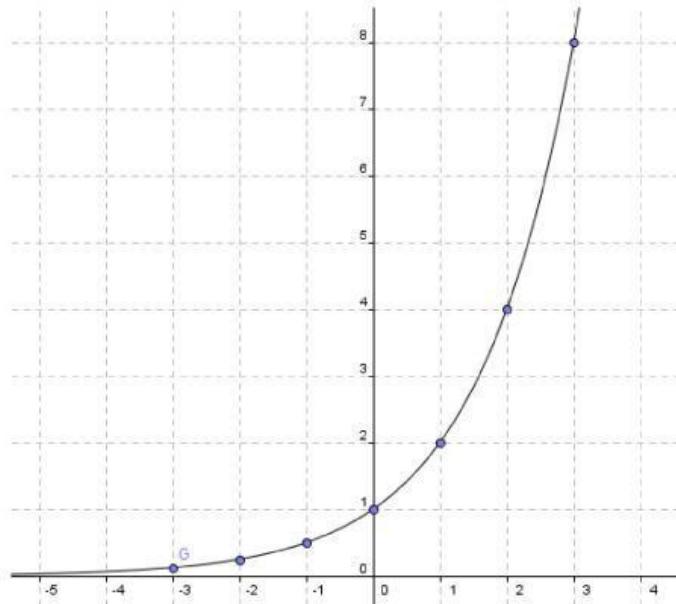
Lukislah grafik fungsi $y = 2^x$ dengan $x \in R$

Jawab :

Table Koordinat

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
(x,y)	$(-3, \frac{1}{8})$	$(-2, \frac{1}{4})$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(3, 8)$

Lukiskanlah koordinat-koordinat yang diperoleh ke dalam koordinat kartesius



Latihan 1.

1. Sederhanakanlah bentuk eksponensial berikut ini ke dalam bentuk pangkat bilangan positif
 - $\left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{27}\right)^{-2}$
 - $\sqrt[3]{16} \div 27^{-2}$
 - $2^3\sqrt{16^3} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$
2. Lukislah grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}$ dengan $x \in R$

4. Persamaan Eksponensial

a. Bentuk $a^{f(x)} = a^p$

Jika $a^{f(x)} = a^p$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = p$

Contoh 4.

$$1) \quad 8^{x+2} = 0,125$$

$$8^{x+2} = \frac{1}{8}$$

$$8^{x+2} = 8^{-1}$$

$$x + 2 = -1$$

$$x = -3$$

$$2) \quad 5^{2x^2-9x-2} = \frac{1}{25}$$

$$5^{2x^2-9x-2} = 5^{-2}$$

$$2x^2 - 9x - 2 = -2$$

$$2x^2 - 9x = 0$$

$$x(2x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } 2x - 9 = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = \frac{9}{2}$$

b. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$

Contoh 5.

$$1) \quad \sqrt{9^{2x+4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(3x+3)}$$

$$(3^2)^{\frac{2x+4}{2}} = (3^{-1})^{-(3x+3)}$$

$$3^{2x+4} = 3^{(3x+3)}$$

$$2x + 4 = 3x + 3$$

$$x = 1$$

$$2) \quad 2^{2x+1} \sqrt{16^{x-1}} = \frac{4^x}{8^{x+1}}$$

$$2^{2x+1} \cdot (2^4)^{\frac{x-1}{2}} = \frac{2^{2x}}{2^{3(x+1)}}$$

$$2^{2x+1} \cdot 2^{2x-2} = 2^{2x-3x-3}$$

$$2^{2x+1+2x-2} = 2^{-x-3}$$

$$2^{4x-1} = 2^{-x-3}$$

$$4x - 1 = -x - 3$$

$$5x = -2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

c. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan $a, b > 0$ dan $a, b \neq 1$, maka $f(x) = 0$

Contoh 6.

$$1) \quad 3^{x^2-4} = (\sqrt{2})^{2x^2-8}$$

$$3^{x^2-4} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x^2-8}$$

$$3^{x^2-4} = 2^{x^2-8}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 2$$

$$2) \quad 19^{\frac{x^2-2x}{2}} = (\sqrt{27})^{\frac{x^2-2x}{3}}$$

$$19^{\frac{x^2-2x}{2}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{x^2-2x}{3}}$$

$$19^{\frac{x^2-2x}{2}} = 3^{\frac{x^2-2x}{2}}$$

$$\frac{x^2-2x}{2} = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 2$$

d. Bentuk $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$

Jika $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, maka ada empat kemungkinan penyelesaiannya yaitu

1) $f(x) = g(x)$

2) $h(x) = 1$

3) $h(x) = -1$, dengan syarat $f(x), g(x)$ sama-sama bernilai genap atau ganjil

4) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x), g(x) > 0$

Contoh 7.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $(x-2)^{3x^2+5x+1} = (x-2)^{x^2-2x-2}$

Jawab :

1) $f(x) = g(x)$

$$3x^2 + 5x + 1 = x^2 - 2x - 2$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(2x+1)(x+3) = 0$$

$$2x+1 = 0 \text{ atau } x+3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ atau } x = -3$$

2) $h(x) = 1$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

3) $h(x) = -1$, dengan syarat $f(x), g(x)$ sama-sama bernilai genap atau ganjil

$$x - 2 = -1$$

$$x = 1$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 9 \text{ (ganjil)}$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3 \text{ (ganjil)}$$

4) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x), g(x) > 0$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = 23, f(x) > 0$$

$$g(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = -2, g(x) < 0$$

Berarti $x = 2$ bukan termasuk penyelesaiannya.

Maka HP = $\left\{-3, -\frac{1}{2}, 3, 1\right\}$

e. Bentuk $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$

Jika $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$, maka ada dua kemungkinan penyelesaiannya yaitu

1) $f(x) = g(x)$

2) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x), g(x) \neq 0$

Contoh 8.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $(6x - 5)^{x+7} = (3x + 1)^{x+7}$

Jawab :

1) $f(x) = g(x)$

$$6x - 5 = 3x + 1$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

2) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x), g(x) \neq 0$

$$x + 7 = 0$$

$$x = -7$$

$$f(-7) = 6 \cdot (-7) - 5 = -47, f(x) \neq 0$$

$$g(-7) = 3 \cdot (-7) + 1 = -20, g(x) \neq 0$$

Maka HP = {2, -7}

f. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$

Penyelesaiannya diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat dengan memisalkan $a^{f(x)} = p$, sehingga didapat $Ap^2 + Bp + C = 0$

Contoh 9.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $4^{x+1} + 11 \cdot 2^x - 3 = 0$

Jawab :

$$4^{x+1} + 11 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$4 \cdot 2^{2x} + 11 \cdot 2^x - 3 = 0$$

Misalkan $2^x = p$, maka

$$4 \cdot p^2 + 11 \cdot p - 3 = 0$$

$$(4p - 1)(p + 3) = 0$$

$$p = \frac{1}{4} \text{ atau } p = -3$$

Akibatnya $2^x = \frac{1}{4}$ dan $2^x \neq -3$

Sehingga diperoleh $x = -2$

Jadi HP = {-2}

Latihan 2.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini

$$1. \ 5^2 \sqrt[6]{\left(\frac{1}{25}\right)^{2x+6}} = \frac{1}{25}$$

$$2. \ \sqrt{3^{2x+1}} = 9^{x-2}$$

$$3. \ 4^{x^2+5x-6} = 9^{x^2+5x-6}$$

$$4. \ (x-1)^{2x-9} = (x^2 - 2x + 1)^{3x+1}$$

$$5. \ (x^2 - 4)^{3x+5} = (\sqrt{10x - 13})^{6x+10}$$

$$6. \ 3^{x+1} + 9^{x+1} = 12$$

5. Pertidaksamaan Eksponensial

Langkah penyelesaian dari suatu pertidaksamaan itu merupakan lanjutan dari persamaannya, yakni setelah didapatkan nilai x maka disubtitusi dan diuji digaris bilangannya, atau bisa ditulis :

- Anggap pertidaksamaan itu sebagai suatu persamaan, sehingga kita bisa menggunakan penyelesaian dari bentuk-bentuk umum persamaan eksponensial untuk memperoleh nilai x nya.
- Tuliskanlah nilai x itu ke dalam garis bilangan, lalu ujikan daerah penyelesaiannya.

Contoh 10.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{5x+4}} > \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$ dengan $x \in \mathbb{Z}$

Jawab :

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{5x+4}} > \left(\frac{1}{25}\right)^{-3} \text{ dengan } x \in \mathbb{Z}$$

Langkah penyelesaian

1. Anggap pertidaksamaan itu suatu persamaan

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{5x+4}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$$

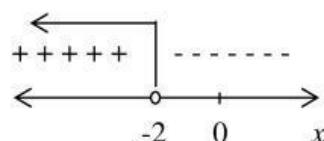
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{5x+4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6}$$

$$5x + 4 = -6$$

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

2. Buat garis bilangan lalu ujikan daerahnya



Misal $x = 0$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{5.0+4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-6}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 > \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \text{ (salah)}$$

Jadi HP = $\{x \mid x < -2, x \in \mathbb{Z}\}$

Latihan 3.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini

1. $5^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^{2x+6} < \frac{1}{25}$
2. $\sqrt{81^{2x+1}} \leq 9^{x-2}$
3. $4^{x^2-x-6} \geq 9^{x^2-x-6}$
4. $(\sqrt[3]{x-1})^{2x-9} > (x^2 - 2x + 1)^{3x+1}$
5. $(x^2 - 4)^{3x+5} < (\sqrt{10x-13})^{6x+10}$
6. $3 \cdot 9^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} + 54 > 0$

LOGARITMA

1. Bentuk Logaritma

Konsep.

$$x = a^y \leftrightarrow \log_a x = y \text{ dengan } a, x > 0 \text{ dan } a \neq 1$$

Sifat-sifat logaritma.

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$, $a \neq 1$, maka:

a. ${}^a \log a = 0$

b. ${}^a \log 1 = 0$

c. ${}^a \log a^n = n$

Untuk a , b , dan c bilangan real positif, $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, berlaku:

a. ${}^a \log (b \times c) = {}^a \log b + {}^a \log c$.

e. ${}^a \log b \times {}^b \log c = {}^a \log c$

b. ${}^a \log \left(\frac{b}{c}\right) = {}^a \log b - {}^a \log c$.

f. $a^{{}^a \log b} = b$

c. ${}^a \log b^n = n {}^a \log b$

g. $a^m {}^a \log b^n = \frac{n}{m} ({}^a \log b)$

d. ${}^a \log b = \frac{c \log b}{c \log a} = \frac{1}{b \log a}$

Contoh 1.

Diketahui ${}^3 \log 5 = x$ dan ${}^3 \log 7 = y$. maka nilai dari ${}^3 \log 245^{1/2}$ adalah ...

Jawab :

$${}^3 \log 245^{1/2} = {}^3 \log (5 \cdot 49)^{1/2}$$

$${}^3 \log 245^{1/2} = {}^3 \log ((5)^{1/2} \cdot (49)^{1/2})$$

$${}^3 \log 245^{1/2} = {}^3 \log (5)^{1/2} + {}^3 \log (7^2)^{1/2}$$

$${}^3 \log 245^{1/2} = ({}^3 \log 5 + {}^3 \log 7)$$

$${}^3 \log 245^{1/2} = (x + y)$$

Jadi, nilai dari ${}^3 \log 245^{1/2}$ adalah $(x + y)$.

Contoh 2.

Jika $b = a^4$, nilai a dan b positif, maka nilai ${}^a \log b - {}^b \log a$ adalah ...

Jawab :

$$b = a^4 \leftrightarrow \log_a b = 4, \text{ akibatnya}$$

$$\log_a b - \log_b a = \log_a b - \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_a b - \log_b a = 4 - \frac{1}{4}$$

$$\log_a b - \log_b a = \frac{15}{4}$$

Jadi nilai dari $\log_a b - \log_b a$ adalah $\frac{15}{4}$

Latihan 1.

1. Jika $\log_2 3 = a$ dan $\log_3 5 = b$, nilai dari $\log_{18} 50$ adalah ...
2. $27^{\log_9 4} + \frac{6^{\log_3 2}}{2^{\log_3 2}} = \dots$
3. $\log_a \frac{1}{b} \cdot \log_b \frac{1}{c^2} \cdot \log_c \frac{1}{a^3} = \dots$
4. $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \dots$
5. $(a^{\log_a c})^{\log_c a} (b^{\log_b 5})^{\log_5 a} = \dots$

2. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma f dengan bilangan pokok/basis a adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan real x ke $\log_a x$ dengan $a > 0$ dan ditulis sebagai :

Bentuk pemetaan : $f: x \rightarrow \log_a x$, dengan $a, x > 0$ dan $a \neq 1$ atau

Bentuk formula : $f(x) = \log_a x$, dengan $a, x > 0$ dan $a \neq 1$

Contoh 3.

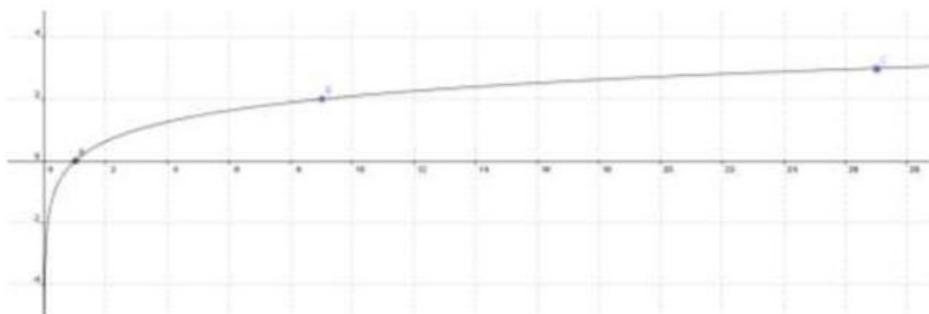
Lukislah grafik fungsi logaritma $y = \log_3 x$ dengan $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Jawab :

Table Koordinat

x	1	3	9	27
$y = \log_3 x$	0	1	2	3
(x,y)	(1, 0)	(3, 1)	(9, 2)	(27, 3)

Lukiskanlah koordinat-koordinat yang diperoleh ke dalam koordinat kartesius



Latihan 2.

1. Lukislah grafik $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ dengan $x \in \mathbb{R}$
2. Lukislah grafik $f(x) = \log_2 x^2 + 2x + 1$ dengan $x \in \mathbb{R}$

3. Persamaan Logaritma.

a. Bentuk $\log_a f(x) = \log_a p, f(x) > 0 \leftrightarrow f(x) = p$

Contoh 4.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini

- 1) $\log_2(x + 2) = \log_2 4$
- 2) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{(x + 2)^2} = 2$

Jawab :

1) $\log_2(x + 2) = \log_2 4$

Hal ini berarti

$$\log_2(x + 2) = \log_2 4$$

$$x + 2 = 4$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4, f(x) > 0$$

Maka HP = {2}

2) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{(x + 2)^2} = 2$

Hai ini berarti

$$\log_{\sqrt[3]{3}}(x + 2)^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\log_{\sqrt[3]{3}}(x + 2)^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\log_3(x + 2)^2 = \log_3 9$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

$$x^2 + 4x + 4 = 9$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5 \text{ atau } x = 1$$

$$f(-5) = (-5 + 2)^2 = 9, f(x) > 0$$

$$f(1) = (1 + 2)^2 = 9, f(x) > 0$$

Maka HP = {-5, 1}

b. Bentuk $\log_a f(x) = \log_a g(x), f(x), g(x) > 0 \leftrightarrow f(x) = g(x)$

Contoh 6.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini

- 1) $\log_5 x^2 = 4 \cdot \log_{25} \sqrt{2x - 1}$
- 2) $\log_3 x^2 = 2 \cdot \log_9(5x + 6)$

Jawab :

1) $\log_5 x^2 = 4 \cdot \log_{25} \sqrt{2x - 1}$

Hal ini berarti

$$\begin{aligned}\log_5 x^2 &= 4 \cdot \log_5 (2x - 1)^{\frac{1}{4}} \\ \log_5 x^2 &= \log_5 (2x - 1) \\ x^2 &= 2x - 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)(x - 1) &= 0 \\ x &= 1 \\ f(1) &= (1)^2 = 1, f(x) > 0 \\ g(1) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, g(x) > 0 \\ \text{Maka HP} &= \{1\}\end{aligned}$$

2) $\log_3 x^2 = 2 \cdot \log_9 (5x + 6)$

Hal ini berarti

$$\begin{aligned}\log_3 x^2 &= \log_3 (5x + 6)^{\frac{2}{2}} \\ x^2 &= 5x + 6 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x - 6)(x + 1) &= 0 \\ x = 6 \text{ atau } x &= -1 \\ f(6) &= (6)^2 = 36, f(x) > 0 \\ g(6) &= 5 \cdot 6 + 6 = 36, g(x) > 0 \\ f(-1) &= (-1)^2 = 1, f(x) > 0 \\ g(-1) &= 5 \cdot -1 + 6 = 1, g(x) > 0 \\ \text{Maka HP} &= \{-1, 6\}\end{aligned}$$

c. Bentuk $\log_a f(x) = \log_b f(x)$, $a \neq b \leftrightarrow f(x) = 1$

Contoh 5.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini

- 1) $\log_5 2x - 1 = 4 \cdot \log_9 \sqrt{2x - 1}$
- 2) $\log_7 (x^2 - 1) = \log_5 (x + 1)(x - 1)$

Jawab :

$$\begin{aligned}1) \quad \log_5 2x - 1 &= 4 \cdot \log_9 \sqrt{2x - 1} \\ \text{Hal ini berarti} \\ \log_5 2x - 1 &= 4 \cdot \log_3 (2x - 1)^{\frac{1}{4}} \\ \log_5 2x - 1 &= \log_3 (2x - 1) \\ 2x - 1 &= 1 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \\ f(1) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, f(x) > 0 \\ \text{Maka HP} &= \{1\}\end{aligned}$$

2) $\log_7(x^2 - 1) = \log_5(x + 1)(x - 1)$

Hal ini berarti

$$\log_7(x^2 - 1) = \log_5(x^2 - 1)$$

$$x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm 2$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3, f(2) > 0$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3, f(-2) > 0$$

Maka HP = {-2, 2}

d. Bentuk $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x), f(x), g(x), h(x) > 0, f(x) \neq 1 \Leftrightarrow g(x) = h(x)$

Contoh 7.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan

$$\log_{x+1} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}} x + 2 \right) = \log_{x^2+2x+1} (x+5)$$

Jawab :

$$\log_{x+1} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}} x + 2 \right) = \log_{x^2+2x+1} (x+5)$$

Hal ini berarti

$$\log_{x+1} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}} x + 2 \right) = \log_{(x+1)^2} (x+5)$$

$$\log_{x+1} \left(\sqrt[3]{2^{-6}} x + 2 \right) = \log_{(x+1)^2} (x+5)$$

$$\log_{x+1} (2^{-2} x + 2) = \log_{x+1} \sqrt{x+5}$$

$$(2^{-2} x + 2) = \sqrt{x+5}$$

$$\frac{1}{4} x + 2 = \sqrt{x+5}$$

$$\left(\frac{1}{4} x + 2 \right)^2 = x + 5$$

$$\frac{1}{16} x^2 + x + 4 = x + 5$$

$$\frac{1}{16} x^2 = 1$$

$$x = \pm 4$$

$$f(4) = 4 + 1 = 5, f(4) > 0$$

$$f(-4) = -4 + 1 = -3, f(-4) < 0$$

Maka HP = {4}

e. Bentuk $A(\log_a f(x))^2 + B(\log_a f(x)) + C = 0$, misalkan $\log_a f(x) = p$

Contoh 8.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan $\log_3^2 x - \log_3 x^5 + 4 = 0$

Jawab :

$$\log_3^2 x - \log_3 x^5 + 4 = 0$$

Hal ini berarti

$$\log_3^2 x - 5 \cdot \log_3 x + 4 = 0$$

$$\log_3^2 x - 5 \cdot \log_3 x + 4 = 0$$

Misalkan $\log_3 x = p$, maka diperoleh

$$p^2 - 5p + 4 = 0$$

$$(p - 1)(p - 4) = 0$$

$$p = 1 \text{ atau } p = 4, \text{ akibatnya}$$

$$\log_3 x = 1 \text{ atau } \log_3 x = 4$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 81$$

Latihan 3.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini

1. $\log_5 2x + 1 = \log_5 11$
2. $\log_5 5x + 10 = \log_4 5x + 10$
3. $\log_2 2x + 1 = \log_2 7x - 9$
4. $\log_{\frac{1}{2}x} \left(\frac{2}{x} - 4 \right) = \log_{\frac{1}{4}x^2} 4x^2 + \log_{\frac{1}{8}x^3} 27$
5. $x^{2 \cdot \log x} - 6x^{\log x} = 7$

d. Pertidaksamaan Logaritma

Langkah penyelesaian dari suatu pertidaksamaan itu merupakan lanjutan dari persamaannya, yakni setelah didapatkan nilai x maka disubtitusi dan diuji digaris bilangannya, atau bisa dituliskan :

- a. Anggap pertidaksamaan itu sebagai suatu persamaan, sehingga kita bisa menggunakan penyelesaian dari bentuk-bentuk umum persamaan logaritma untuk memperoleh nilai x nya.
- b. Tuliskanlah nilai x itu ke dalam garis bilangan, lalu ujikan daerah penyelesaiannya.

Contoh 9.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\log_2(x + 1) > \log_2 4$, $x \in \mathbb{Z}$

Jawab :

$$\log_2(x + 1) > \log_2 4$$

Hal ini berarti