

LATIHAN SOAL

PERSAMAAN DIFERENSIAL METODE KOEFISIEN TAK TENTU

1. Tentukan solusi umum persamaan diferensial nonhomogen $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1$

Langkah I: Menentukan solusi homogen

$y'' + 2y' - 3y = 0$ (diubah ke persamaan diferensial homogen)

$m^2 + 2m + 3 = 0$ (persamaan karakteristik)

Akar-akar persamaan:

$$m_{1,2} = (m + 3)(m - 1)$$

$$m_1 = -3 ; m_2 = 1$$

$$\text{Solusi homogen} = y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$$

DONT
FORGET

SOLUSI UMUM PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDE-2

1. Solusi akar-akar berbeda

$m_1 = a, m_2 = b$ (a dan b bilangan ril)

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. Solusi akar-akar kembar

$m_1 = m_2 = a$ (a bilangan ril)

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}$$

3. Solusi akar-akar kompleks

$m_{1,2} = a \pm bi$ (a bilangan ril, b bilangan imajiner)

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

Langkah II: Menentukan solusi partikular

$y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1$ (PD linier nonhomogen)

$r(x) = x^2 + 1$ sehingga:

- $y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$
- $y'_p = 2A_2 x + A_1$
- $y''_p = 2A_2$



Substitusi y_p, y'_p, y''_p ke dalam persamaan, dan didapatkan:

$$(2A_2) + 2(2A_2x + A_1) - 3(A_2x^2 + A_1x + A_0) = x^2 + 1$$

$$2A_2 + 4A_2x + 2A_1 - 3A_2x^2 - 3A_1x - 3A_0 = x^2 + 1$$

$$2A_2 + 4A_2x + 2A_1 - 3A_2x^2 - 3A_1x - 3A_0 = x^2 + 1$$

Dengan menyamakan koefisien berpangkat sama, diperoleh:

- $-3A_2x^2 = x^2$

$$-3A_2 = 1$$

$$A_2 = -\frac{1}{3}$$

- $4A_2x - 3A_1x = 0$

$$4\left(-\frac{1}{3}\right)x - 3A_1x = 0$$

$$-\frac{4}{3}x - 3A_1x = 0$$

$$-3A_1x = \frac{4}{3}x$$

$$-3A_1 = \frac{4}{3}$$

$$A_1 = -\frac{4}{9}$$

- $2A_2 + 2A_1 - 3A_0 = 1$

$$2\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{4}{9}\right) - 3A_0 = 1$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{8}{9} - 3A_0 = 1$$

$$-3A_0 = 1 + \frac{14}{9}$$

$$-3A_0 = \frac{23}{9}$$

$$A_0 = -\frac{23}{27}$$

$$\text{Solusi partikular} = y_p(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{23}{27}$$

Langkah III: Menentukan solusi umum

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{23}{27}$$



2. Tentukan penyelesaian PD $y'' - y' - 2y = 6e^x$

Langkah I: Menentukan solusi homogen

Akar-akar persamaan:

- a. 2 dan -1
- b. 2 dan 1
- c. -2 dan 1
- d. -2 dan -1

Solusi homogen:

- a. $y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$
- b. $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$
- c. $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$
- d. $y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x$

Langkah II: Menentukan solusi partikular

Bentuk y_p :

Nilai A = ...

- a. 3
- b. 1/3
- c. -3
- d. -3/2

Solusi partikular:

- a. $3e^x$
- b. $-1/3e^x$
- c. $-3e^x$
- d. $-3/2e^x$

Langkah III: Menentukan solusi umum

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Maka $y(x) = \dots$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 3e^x$$

3. Tentukan penyelesaian PD $y'' - 2y' + y = 4 \cos x$

Langkah I: Menentukan solusi homogen

Akar-akar persamaan berupa

- a. Akar kembar
- b. Akar kompleks
- c. Akar berbeda

Nilai akar-akar persamaan: $m_1 = \dots$ dan $m_2 = \dots$

Jenis solusi homogen:

- a. $y(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$
- b. $y(x) = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x}$
- c. $y(x) = C_1e^{ax} \cos bx + C_2e^{ax} \sin bx$

Langkah II: Menentukan solusi partikular

Bentuk y_p adalah $A \cos x + B \sin x$ (Benar) (Salah)

Nilai A = dan B =

Solusi partikular = $y_p(x) = \dots$

Langkah III: Menentukan solusi umum

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - 2 \sin x$$

