Guía 6

Operaciones multiplicativas con los números racionales

Muchas situaciones se pueden resolver como una multiplicación de fracciones que consiste en multiplicar los valores de los numeradores como de los denominadores y se simplifica el resultado. En el caso, de extenderse esta operación a los racionales se tendría en cuenta la forma de multiplicar de los números enteros.

El **producto de dos números racionales** que están expresados de la forma $\frac{a}{b}$ es el número que se obtiene al multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Se tiene en cuenta la regla de los signos usadas en los números enteros.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejemplos de multiplicación de racionales

- Factores racionales positivos

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 9} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21}$$

- Factores racionales negativos:

$$\frac{-1}{5} \cdot \frac{-4}{7} = \frac{(-1) \cdot (-4)}{5 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$

- Un factor negativo y otro positivo

Son iguales

Se simplifica si es posible

$$\frac{4}{9} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{4 \times (-3)}{9 \times 5} = \frac{-12}{45} = -\frac{4}{15}$$

Como en todas las operaciones se debe revisar las propiedades que cumple. A continuación se desarrolla las propiedades que cumple la operación multiplicación de los racionales.

Clausurativa: La operación multiplicación de los racionales cumple esta propiedad porque **siempre** que se multiplican dos números racionales el resultado es otro número racional.

Simbólicamente: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ pertenecen a los racionales entonces , $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ donde $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ es un número racional.

- Verifica la propiedad clausurativa:

$$\frac{3}{5} \times \left(-\frac{10}{9}\right) = \longleftarrow \text{¿Es un número racional?}$$

Asociativa. Esta propiedad la cumple la operación multiplicación de los números racionales **siempre,** ya que al presentarse una multiplicación de tres factores o más, se pueden agrupar de diferentes maneras y el resultado no se altera.

Simbólicamente; $\left[\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)\right] \cdot \left(\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left[\left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{e}{f}\right)\right]$

- Verifica la propiedad conmutativa:

$$-\frac{2}{7} \times \frac{21}{10} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{21}{10} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

¿Son iguales o diferentes los resultados?

- Verifica la propiedad asociativa:

$$\left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \boxed{} \qquad -\frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \boxed{}$$

¿Son iguales o diferentes?

Modulativa. Esta propiedad la cumple la operación multiplicación de racionales porque existe el 1 como racional que al multiplicar cualquier número racional por él, se obtiene ese número racional.

Simbólicamente, $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot 1 = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$

- Verifica la propiedad modulativa:

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \_\_\_ \text{ y } 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \_\_\_$$

¿Los resultados son el mismo número racional?

$$\left(\frac{-2}{25}\right) \cdot 1 = \_\_\_ \text{ y } 1 \cdot \left(\frac{-2}{25}\right) = \_\_\_$$

¿Los resultados son el mismo número racional?

Todo número racional tiene un inverso multiplicativo o recíproco.

Simbólicamente:

$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = 1$, Donde $\left(\frac{b}{a}\right)$ es el inverso multiplicativo de $\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\left(\frac{a}{b}\right)$ es el inverso multiplicativo de $\left(\frac{b}{a}\right)$.

Por ejemplo:

$\frac{7}{9}$ Es el inverso multiplicativo es de $\frac{9}{7}$ y $\frac{9}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{9}$.

$\frac{-3}{4}$ Es el inverso multiplicativo es $\frac{-4}{3}$ y $\frac{-4}{3}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{-3}{4}$.

Como observas en todo racional el inverso multiplicativo o recíproco, el numerador de uno, es el denominador del otro. Lo mismo sucede con el denominador de uno es el numerador del otro.

Invertiva. Esta propiedad la cumple la multiplicación de los números racionales ya que al tener factores que son inversos multiplicativos uno con respecto al otro. Su resultado **siempre** es uno.

Simbólicamente;

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad \text{como} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

- Verifica la propiedad invertiva:

$$\frac{-3}{7} \cdot \frac{-7}{3} = \_\_\_$$

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2} = \_\_\_$$

Anulativa: Esta propiedad la cumple la operación multiplicación ya que al ser uno de los factores el número cero el resultado de esa multiplicación es cero.

Simbólicamente, $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot 0 = 0$ como $0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = 0$

- Verifica la propiedad anulativa:

$$\left(\frac{-5}{7}\right) \cdot 0 = \_\_\_\_$$

$$\left(\frac{6}{7}\right) \cdot 0 = \_\_\_\_$$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición
Esta propiedad la cumplen los números racionales y consiste: el producto de un número racional por una suma, es igual a la suma de los productos de este número racional por cada uno de los sumandos.

Simbólicamente, $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción

Esta propiedad la cumplen los números racionales y consiste en: el producto de un número racional por una resta, es igual a la resta de los productos de este número racional por el minuendo y por el sustraendo.

Simbólicamente, $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

Observa los ejemplos:

Para la suma

$$\frac{-4}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{-1}{4}\right)=\frac{-4}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{-4}{7}\cdot\frac{-1}{4}=\frac{-8}{21}+\frac{-4}{28},\text{ simplificando}$$

$$\frac{-8}{21}+\frac{-4}{28}=\frac{-8}{21}+\frac{-1}{7},\text{ hallando común denominador}$$

$$\frac{-8\cdot 1+1\cdot(-3)}{21}=\frac{-8+(-3)}{21}=\frac{-11}{21},$$

Para la resta:

$$\frac{-5}{8}\cdot\left(\frac{-2}{7}-\frac{-3}{5}\right)=\frac{-5}{8}\cdot\frac{-2}{7}-\frac{-5}{8}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{10}{56}-\frac{15}{40},\text{ simplificando}$$

$$\frac{10}{56}-\frac{15}{40}=\frac{5}{28}-\frac{3}{8},\text{ hallando común denominador}$$

$$\frac{5}{28}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 2-3\cdot 7}{56}=\frac{10-21}{56}=\frac{-11}{56}.$$

- Aplica la propiedad distributiva de los números racionales:

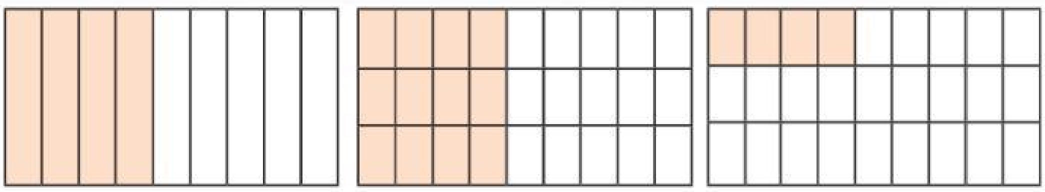
$$\frac{-2}{3}\cdot\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right]=\_\_\_\_$$

$$\frac{5}{8}\cdot\left[\frac{-3}{4}-\frac{5}{6}\right]=\_\_\_\_$$

Estudia cómo se resuelve la siguiente situación:

- En el terreno de cultivo de la finca cafetera los $\frac{4}{9}$ están sembrados con semilla de café de Colombia. Si estas partes se dividen en tres secciones iguales, ¿qué fracción del terreno le corresponde cada sección?

  Si resolvemos la situación con representaciones del terreno (ver figura) tenemos:



a. Se sombrean $\frac{4}{9}$ del rectángulo que representa el terreno.

b. Se divide la región sombreada en tres partes iguales y se toma una.

c. Lo sombreado nuevamente corresponde a $\frac{4}{27}$ del total del terreno.

Si se resuelve como la operación división de las fracciones, tenemos:

$$\frac{4}{9} \div 3 = \frac{4}{9} \div \frac{3}{1} = \frac{4}{9} \times \overbrace{\frac{1}{3}}^{\text{Inverso multiplicativo de 3}} = \frac{4 \times 1}{9 \times 3} = \frac{4}{27}$$

Estas situaciones las podemos resolver como división entre fracciones. Ahora se extenderá dicha operación a los números racionales.

La división entre los racionales o el cociente de dos números racionales se define como el producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Recuerde que se aplica la ley de los signos de los enteros en la división.

$$\overbrace{\frac{a}{b}}^{\text{Dividendo}} \div \overbrace{\frac{c}{d}}^{\text{Divisor}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Por ejemplo la división de $-\frac{8}{12} \div \frac{3}{4}$,

Se realiza así:

$$-\frac{8}{12} \div \frac{3}{4} = -\frac{8}{12} \times \overbrace{\frac{4}{3}}^{\text{Inverso multiplicativo de } \frac{3}{4}} = \frac{-8}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{-8 \times 4}{12 \times 3} = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a. $\frac{-5}{2} \cdot \frac{5}{8}$

b. $\frac{-3}{6} \cdot \frac{-3}{7}$

c. $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-7}{11}$

d. $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7}$

e. $\frac{12}{13} \cdot \frac{7}{3}$

f. $\frac{-9}{3} \cdot \frac{-6}{15}$

2. Realiza las siguientes divisiones mostrando las correspondientes multiplicaciones para hallar su resultado:

a. $\frac{-7}{3} \div \frac{-4}{5}$

c. $\frac{2}{9} \div \frac{-3}{9}$

e. $\frac{-5}{12} \div \frac{6}{8}$

b. $\frac{-7}{12} \div \frac{6}{12}$

d. $\frac{-1}{5} \div \frac{5}{3}$

f. $-6 \div \frac{-1}{6}$

3. Escribe y verifica con ejemplos las propiedades que cumple la división de los números racionales. Realiza en tu cuaderno.

4. Propón una estrategia para resolver cada una de las siguientes operaciones:

a. $-\frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}\right)$

b. $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) \times \frac{9}{4}$

c. $-\left(\frac{5}{8} + \frac{2}{6}\right) \div \frac{2}{3}$

5. A cuál de las propiedades corresponde cada uno de los siguientes enunciados generales:

a. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

b. $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$

c. $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$

d. $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \times \frac{e}{f}\right)$

6. Expresa cada enunciado como una expresión matemática y halla el resultado:

» Los cuatro quintos de siete octavos.

» Los tres décimos de menos quince veinteavos.

» Los nueve quinceavos de treinta dieciochoavos.

» Los cinco séptimos de menos nueve catorceavos.

7. Completa los siguientes enunciados para que sean verdaderos.

» El signo del producto de dos números racionales de igual signo es…

» El signo del producto de dos números racionales de diferente signo es…

» El signo del cociente de dos números racionales de igual signo es…

» El signo del cociente de dos números racionales de diferente signo es…

8. Responde las siguientes preguntas. Propón ejemplos que las argumenten.

» ¿Qué signo tiene el inverso multiplicativo de un número racional positivo?

» ¿Qué signo tiene el inverso multiplicativo de un número racional negativo?

9. Resuelve las siguientes situaciones.

- En una parcela de $\frac{456}{7}$ m^2, se destina la cuarta parte para el cultivo de cereales y el resto para el cultivo de hortalizas. ¿Cuál es el área total del terreno destinada para el cultivo de cereales? ¿Y cuál al cultivo de hortalizas?

- El paso de cierta persona equivale a $\frac{7}{8}$ de 1 metro. ¿Qué distancia recorre con 1.000 pasos? ¿Cuántos pasos debe dar para recorrer una distancia de 1.400 m?