



Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 04

Temas abordados: Limites envolvendo o infinito; Assíntotas

Seções do livro: 2.4

- 1) Explique o que significa dizer que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical da função f . Em seguida, considerando as funções esboçadas nos gráficos abaixo, determine as assíntotas verticais sugeridas por cada um deles.

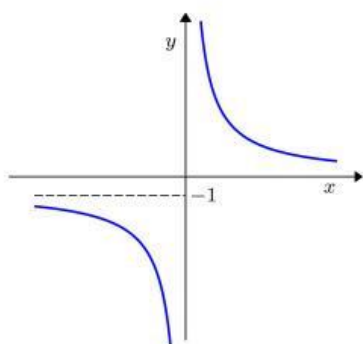


Figura 1

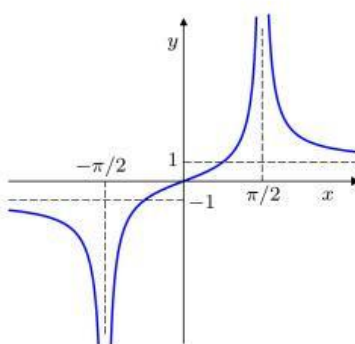


Figura 2

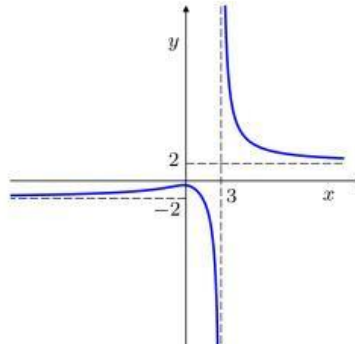


Figura 3

- 2) No limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, quando o numerador se aproxima de um número diferente de zero e o denominador tende para zero com um sinal definido, temos um limite infinito. Neste caso, é necessário estudar o sinal da fração quando x está próximo de a , de modo a decidir se o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 4x - 2}{1 - x^3} = -\infty,$$

pois o numerador se aproxima de $1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 3 > 0$ e o denominador se aproxima de zero por valor negativos, pois $x > 1$ (lembre que o limite é pela direita). Assim, a fração tem sinal negativo e, em módulo, fica muito grande.

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 8}{x - 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 4x}{(x - 2)^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4x + 8}}{-x^2 + 3x - 2}$

- 3) Calcular assíntota verticais não é o mesmo que igualar denominadores a zero! Por exemplo, o denominador da função $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ se anula em $x = 2$, mas

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 4,$$

e portanto $x = 2$ não é assíntota vertical. Para as funções abaixo, determine os candidatos à assíntota para, em seguida, checar se cada um deles é de fato assíntota. (veja Exemplo 4 do Texto 1)

(a) $f(x) = \frac{3x + 12}{x^2 - 3x - 28}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - x}$

(c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- 4) Explique o que significa dizer que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f . Em seguida, considerando os gráficos esboçados no Exercício 1, determine as assíntotas horizontais sugeridas por cada um deles.
- 5) Em alguns casos, o cálculo do limite no infinito de frações pode ser feito identificando-se os termos dominantes do numerador e do denominador, e colocando-se um deles em evidência. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x - 2}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x^3} - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 9}{2x^2 - 4x - 1} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 8}{8x - x^2} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{x - 1} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 - 3}{2x^3 + 4x - 7} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} \end{array}$$

Dica: no item (e) lembre que $\sqrt{x^2} = |x|$ e proceda como neste vídeo

- 6) Calcule os limites abaixo.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1} \right) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{25-x^2}}{5-x} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 4) & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-4x}{2x-3} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2 + \frac{3}{x}} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \\ \text{(g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin^3(x)}{5x+6} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \cos^2(x))}{(x + \cos(x))^2} \\ \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2-1} - x) \end{array}$$

Dica: Se tiver dúvida nos dois últimos itens, veja o Exemplo 6 do Texto 2. Para aqueles que envolvem as funções seno e cosseno lembre que elas são periódicas e limitadas.

- 7) Determine todas as assíntotas das funções abaixo. (veja vídeo)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} g(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3x} & \text{(b)} f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} & \text{(d)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \\ \text{(e)} f(x) = x + \sin(x) & \text{(f)} f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{se } x \geq 0, x \neq 4 \end{cases} \end{array}$$

Dica: se tiver dúvidas no item (f), veja este vídeo

8) Dizemos que uma reta $y = mx + b$ é uma assíntota do gráfico de uma função f quando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Quando $m = 0$, temos a assíntota horizontal $y = b$. Quando $m \neq 0$ temos uma assíntota oblíqua. Por exemplo, a reta $y = x - 4$ é uma assíntota oblíqua de $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - (x - 4) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x - 4)}{x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6}{x + 1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Verifique, nos itens abaixo, que a reta dada é uma assíntota da função f indicada:

(a) $y = 3x + 2$ de $f(x) = 3x + 2 + \frac{\sin(x)}{x}$;

(b) $y = 2x + 6$ de $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 3x + 1}$;

(c) $y = x$ e $y = -x$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

9) Para funções racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ com $\text{grau}(p) = 1 + \text{grau}(q)$, sempre há assíntota oblíqua. Por exemplo, se $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$, então, dividindo $p(x) = x^2$ por $q(x) = x + 1$, obtemos que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$, donde segue que a reta $y = x - 1$ é uma assíntota oblíqua para f . Determine as assíntotas oblíquas das funções racionais abaixo:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ (b) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2}$

10) Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f , então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b.$$

Logo, uma estratégia para encontrar as assíntotas é verificar se o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ é finito. Em caso afirmativo, denotamos por m o valor deste limite e verificamos se o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ é finito. Se este também for finito, denotamos por b seu resultado e obtemos assim a assíntota $y = mx + b$. O mesmo vale quando $x \rightarrow -\infty$. Utilize este procedimento para calcular as assíntotas das funções abaixo:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 5x}$ (c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x - 1}$

RESPOSTAS

- 1) A reta $x = a$ é uma assíntota vertical de f se qualquer um dos limites laterais neste ponto é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas verticais:

- Gráfico 1: a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, ou porque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- Gráfico 2: as retas $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$ são assíntotas verticais.
- Gráfico 3: a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

- 2) (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

- 3) (a) os candidatos são $x = 7$ e $x = -4$. Temos que $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -3/11$, e portanto $x = -4$ não é assíntota. No outro ponto temos $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = +\infty$, e portanto $x = 7$ é assíntota vertical.

(b) os candidatos são $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. A primeira reta não é assíntota e as duas últimas são.

(c) o candidato é $x = 0$, que não é assíntota pois $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$.

- 4) A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f quando $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas horizontais:

- Gráfico 1: as retas $y = 0$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.
- Gráfico 2: as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$.
- Gráfico 3: as retas $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

- 5) (a) 0 (b) -4 (c) $+\infty$ (d) 4 (e) $\begin{cases} 1 & \text{se } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{se } x \rightarrow -\infty \end{cases}$ (f) 0

- 6) (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) $-\infty$ (d) -2 (e) $\sqrt[3]{2}$
 (f) não existe (g) $1/5$ (h) não existe (i) 0 (j) $-1/2$

- 7) (a) Verticais: $x = 0$ e $x = 3/2$, Horizontais: $y = 1$
 (b) Verticais: não existem, Horizontais: $y = 2$ e $y = -2$
 (c) Verticais: não existem, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$
 (d) Verticais: $x = -2$ e $x = 2$, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$
 (e) Verticais: não existem, Horizontais: não existem
 (f) Verticais: $x = 0$, Horizontais: não existem

8)

- 9) (a) $y = x$ (b) $y = x - 1$.

- 10) (a) $y = x$ e $y = -x$ (b) $y = 2x$ (c) $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$.