

ADI FIRMANSYAH, S.Pd

LKPD

(Lembar Kerja Peserta Didik)

DIGITAL

MATEMATIKA

(LIMIT FUNGSI ALJABAR)

Nama Siswa :
Kelas :



LIVEWORKSHEETS

KOMPETENSI DASAR

3.3 Menentukan nilai limit fungsi aljabar

4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar

INDIKATOR

3.3.1 Menentukan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tertentu

3.3.2 Menentukan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tak terhingga

4.3.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tertentu

4.3.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi limit fungsi aljabar baik secara mandiri maupun kelompok, diharapkan siswa dapat :

1. Menentukan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tertentu
2. Menentukan nilai limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tak terhingga
3. Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tertentu
4. Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi aljabar mendekati suatu nilai variabel tak terhingga
5. Mengetahui teorema limit fungsi aljabar

A. Konsep Limit Fungsi Aljabar

Limit dapat diartikan sebagai menuju suatu batas, sesuatu yang dekat namun tidak dapat dicapai. Dalam bahasa matematika, keadaan ini dapat disebut limit. Mengapa harus ada limit? limit menjelaskan suatu fungsi jika batas tertentu didekati. Mengapa harus didekati? karena suatu fungsi biasanya tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu. Walaupun suatu fungsi seringkali tidak terdefinisi untuk titik tertentu, namun masih dapat dicari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu semakin didekati yaitu dengan limit.

Dalam bahasa matematika, limit dituliskan dengan:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Maksudnya, apabila x mendekati a namun x tidak sama dengan a maka $f(x)$ mendekati L . Pendekatan x ke a dapat dilihat dari dua sisi yaitu sisi kiri dan sisi kanan atau dengan kata lain x dapat mendekati dari arah kiri dan arah kanan sehingga menghasilkan limit kiri dan limit kanan.

Toerema / Pernyataan:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Suatu fungsi dikatakan mempunyai limit apabila antara limit kiri dan limit kanannya mempunyai besar nilai yang sama dan apabila limit kiri dan limit kanan tidak sama maka nilai limitnya tidak ada.

Contoh

Tentukan limit fungsi $f(x) = 2x + 1$ untuk x mendekati 3, pernyataan tersebut dapat dinotasikan sebagai berikut : tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1)$

Pandang fungsi $f(x) = 2x + 1$, yang terdefinisi untuk semua x bilangan nyata.

Selanjutnya kita akan lihat nilai-nilai fungsi $f(x)$ untuk x yang mendekati 3 dari kiri maupun dari kanan, hasilnya tampak pada tabel di bawah ini.

	x mendekati 3 dari kiri □				□	x mendekati 3 dari kanan			
x	2	2,97	2,98	2,99	□ 3 □	3,01	3,02	3,03	4
$f(x) = 2x + 1$	5	6,94	6,96	6,98	□ 7 □	7,02	7,04	7,06	9
	f(x) mendekati 7					f(x) mendekati 7			

Dari tabel di atas terlihat bahwa jika x bergerak semakin mendekati 3 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai $f(x)$ akan semakin mendekati 7. Dalam matematika hal ini dapat dibaca “jika x mendekati 3, maka $2x + 1$ nilainya mendekati 7 atau limit dari $f(x) = 2x + 1$, jika x mendekati 3 adalah 7”

Dalam notasi ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

B. Sifat-sifat Limit Fungsi Aljabar

Apabila n merupakan bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi yang mempunyai limit di c , maka sifat-sifat di bawah ini berlaku.

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
7. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$
9. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ bilamana n

C. Menentukan Nilai Limit Fungsi Aljabar

Ada 2 bentuk dalam menentukan limit fungsi aljabar yaitu:

Bentuk pertama : nilai limit fungsi aljabar mendekati nilai tertentu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Dalam hubungannya dengan bentuk limit yang pertama ada beberapa metode dalam menentukan nilai limit fungsi aljabar yaitu dengan cara substitusi dan cara pemfaktoran.

1. Cara Substitusi

Cara substitusi ini langkahnya dengan mengganti peubah yang mendekati nilai tertentu dengan fungsi aljabarnya. Berikut adalah beberapa contoh yang dapat dipahami.

Contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 = 2$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 5 = 2(2)^2 + 5 = 2(4) + 5 = 8 + 5 = 13$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 5 = 13$$

Contoh 3:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + 2 = (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + 2 = 12$$

Contoh soal 4:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x+1} = \frac{1-(1)}{(1)+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x+1} = 0$$

Contoh 5:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(0)^3}{(0)^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$$

2. Cara Pemfaktoran

Cara pemfaktoran digunakan apabila cara substitusi menghasilkan nilai limit yang tidak terdefinisikan seperti pada contoh berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Cara pemfaktoran dilakukan dengan langkah menentukan faktor persekutuan antara pembilang dan penyebutnya. Berikut beberapa contoh untuk dipahami.

Contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = (2) + 2 = 4$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = (1) + 5 = 6$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$$

Contoh soal 3:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 9x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (5x - 1) = 5(-2) - 1 = -10 - 1 = -11$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 9x - 2}{x + 2} = -11$$

3. Metode mengalikan dengan faktor sekawan

Contoh soal:

Tentukan nilai limit dari

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \dots$$

Langkah awal yang perlu dilakukan untuk menentukan nilai suatu limit yaitu dengan mensubstitusikan $x=c$ ke $f(x)$, sehingga dalam kasus ini substitusikan

$$x=4 \text{ ke } \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{4-4}{\sqrt{6 \times 4-8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{0}{4-\sqrt{24-8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{0}{4-\sqrt{16}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{0}{0}$$

Setelah disubstitusikan ternyata nilai limit tersebut tidak terdefinisi atau merupakan bentuk tak tentu 0/0. Maka dari itu untuk menentukan nilai suatu limit harus menggunakan metode lain. Apabila diperhatikan, pada $f(x)$ terdapat bentuk akar yaitu $\sqrt{6x-8}$ sehingga metode perkalian dengan akar sekawaran dapat dilakukan pada kasus seperti ini.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{6x-8})}{x^2-\sqrt{6x-8}^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x+\sqrt{6x-8})}{x^2-6x+8}$$

Bentuk x^2-6x+8 dapat difaktorkan menjadi $(x-4)(x-2)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x+\sqrt{6x-8})}{(x-4)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x+\sqrt{6x-8})}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{-(4+\sqrt{6 \times 4-8})}{4-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{-(4+\sqrt{16})}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = -4$$

Perhatikan video tayangan berikut agar lebih mudah memahami materi diatas

<https://www.youtube.com/watch?v=zE8m4xNizDY>

Bentuk kedua : nilai limit fungsi aljabar mendekati nilai tak tertentu

$$\lim_{x \rightarrow \sim} f(x)$$

Dalam hubungannya dengan bentuk limit yang kedua ada beberapa cara dalam menentukan nilai limit fungsi aljabar yaitu metode membagi dengan pangkat tertinggi penyebut dan metode mengalikan dengan faktor sekawan.

contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{4x^2 - 6x + 1}{x^2}}{\frac{2x^2 + 7x}{x^2}}$$

Besar pangkat pembilang dan penyebut dalam soal ini adalah 2, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x}} \\ \frac{4 - \frac{6}{\sim} + \frac{1}{\sim^2}}{2 + \frac{7}{\sim}} &= \frac{4 - 0 - 0}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 7x} = 2$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^3 - 5x}{3x^2 - 7} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{4x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x - \frac{5}{x}}{3 - \frac{7}{x^2}}$$

Besar pangkat pembilang dan penyebut dalam soal ini adalah 3, maka

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x - \frac{5}{x}}{3 - \frac{7}{x^2}} = \frac{4(\sim) - \frac{5}{(\sim)}}{3 - \frac{7}{(\sim)^2}} = \frac{\sim - 0}{3 - 0} = \frac{\sim}{3} = \sim$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^3 - 5x}{3x^2 - 7} = \sim$$

Contoh soal 3:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{-4x^2 + x - 3}{3x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{-4x^2 + x - 3}{x^3}}{\frac{3x^3 - 5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{-4x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{5}{x^3}}$$

Besar pangkat pembilang dan penyebut dalam soal ini adalah 3, maka

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{-4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{5}{x^3}} = \frac{\frac{-4}{\sim} + \frac{1}{\sim^2} - \frac{3}{\sim^3}}{3 - \frac{5}{\sim^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0} = \frac{0}{3} = 0$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{-4x^2 + x - 3}{3x^3 - 5} = 0$$

Perhatikan video tayangan berikut agar lebih mudah memahami materi diatas

<https://www.youtube.com/watch?v=xr1ZGe4JwC0>

TUGAS MANDIRI

A. SOAL ISIAN

Tentukan nilai limit berikut (jawaban singkat)

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + x - 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 8}{x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x-4)}{2(x-1)}$

B. SOAL PILIHAN GANDA

Pilihlah salah satu jawaban yang benar

1. $\lim_{x \rightarrow -5} (2x - 1)$

- a. -9
- b. -10
- c. -11
- d. 9
- e. 10

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 4)$

- a. -2
- b. -1
- c. 0
- d. 1
- e. 2

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

- a. ∞
- b. -2
- c. 0
- d. 1
- e. 2

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x + 8}{3x^2 + 1}$

- a. 6
- b. 3
- c. 2
- d. 0
- e. ∞

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x-4)}{2x(x-1)(x+1)}$

- a. ∞
- b. 0
- c. 1
- d. $\frac{1}{2}$
- e. 2

C. SOAL DRAG AND DROP

Lengkapilah jawaban dari soal-soal berikut dengan meng-drag lalu tempelkan jawaban tersebut dengan meng-drop pada titik-titik soal yang sesuai.

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi yang mempunyai limit di c , maka :

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots$
2. $\lim_{x \rightarrow c} k \cdot f(x) = \dots$
3. $\lim_{x \rightarrow c} \{f(x) - g(x)\} = \dots$
4. $\lim_{x \rightarrow c} \{f(x) \cdot g(x)\} = \dots$
5. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

$k \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$

$k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

k

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

D. SOAL JOIN WITH ARROW

Silahkan tarik garis dari lajur kanan ke lajur kiri sehingga menjadi jawaban yang benar

- | | |
|--|---------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(1-x)}$ | 4 |
| 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x-4)}{(2x-1)(x+1)}$ | $\sim$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4y^3+2x^2-5x-1}{(x-3)(x+1)}$ | 2 |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-7}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+3x+1} - \sqrt{4x^2-5x+6})$ | -1 |

SELAMAT MENGERJAKAN