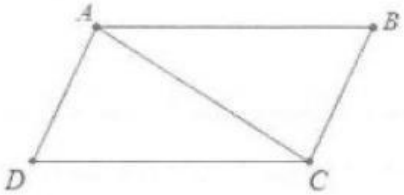
CHỦ ĐỀ 3: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

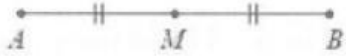
1. Định nghĩa:

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,…

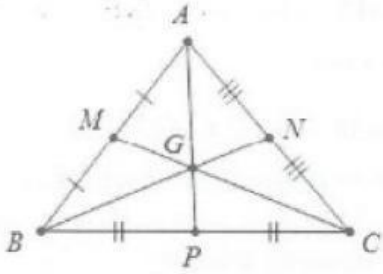
2. Các quy tắc về vectơ



- **Quy tắc 3 điểm:** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ hoặc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành *ACBD* ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



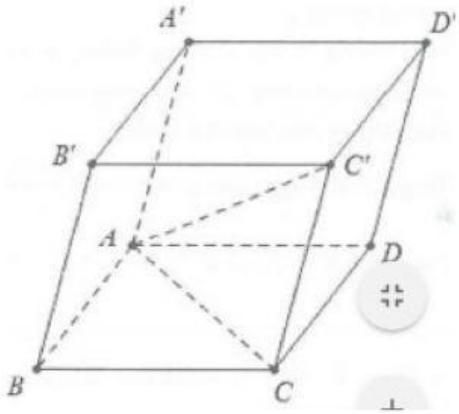
- **Quy tắc trung điểm:** Nếu M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- **Quy tắc trung tuyến:** Nếu AP là trung tuyến của tam giác ABC thì $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$



Tương tự hình bên ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$

- **Quy tắc trọng tâm:** Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Khi đó với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$



- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

Chứng minh:

Ta có: $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

Tương tự: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ suy ra $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Chú ý: Nếu G là trong tâm tứ diện $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

3. Sự đồng phẳng của các vectơ, điều kiện để va vectơ đồng phẳng

Định nghĩa: Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

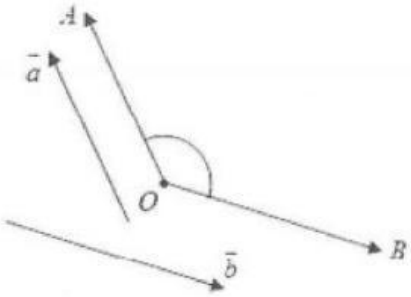
Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

- **Định lí 1:** Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hoặc tồn tại các số *m, n* duy nhất sao cho $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$

LIVEWORKSHEETS

- **Định lí 2:** Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$ trong không gian, ta tìm được các số *m, n, p* duy nhất sao cho

4. Tích vô hướng của 2 vectơ



Góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ được định nghĩa bằng góc *AOB* với $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

Nếu $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước góc giữa chúng có thể nhận một giá trị tùy ý.

Tích vô hướng giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, được kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ và được xác định bởi $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})$ từ đó suy ra cosin góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Đặc biệt khi $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\cos(\vec{a};\vec{b})=0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

Tính chất: Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực *k*. Khi đó ta có:

i) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

iii) $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})+\vec{a}.(k\vec{b})$

iv) $|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

Vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng *d*

Một đường thẳng *d* trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm *A* thuộc *d* và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của đường thẳng *d*.

Ứng dụng của tích vô hướng

Tính độ dài đoạn thẳng *AB*: $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

Xác định góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh các đẳng thức vectơ, chứng minh 3 vectơ đồng phẳng.

Phương pháp giải:

Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng mình bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

LIVEWORKSHEETS

- Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: tồn tai các số *m. n* duy nhất sao cho $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$ thì 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

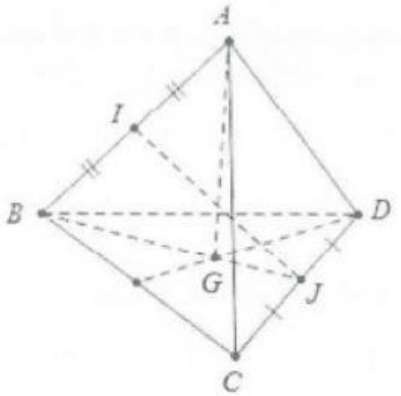
Để biểu diễn vectơ $\vec{x}$ theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng ta tìm được các số *m, n, p* duy nhất sao cho $\vec{x} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$

Ví dụ 1: Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *I* và *J* là trung điểm của *AB* và *CD*.

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

b) Gọi *G* là trọng tâm tam giác *BCD*. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right)$, mặt khác $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$(tính chất trung điểm)

Do đó $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \end{cases}$ cộng vế theo vế ta được:

$3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Mặt khác $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (do *G* là trọng tâm tam giác *BCD*). Do vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$

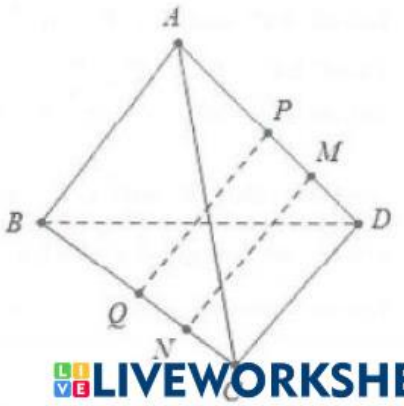
Ví dụ 2: Cho tứ diện *ABCD*. Lấy các điểm *M* và *N* lần lượt thuộc *AD* và *BC* sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$

b) Gọi *P* và *Q* lần lượt là trun điểm của *AD* và *BC*. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

c) Gọi *G* là trung điểm của *PQ*, chứng minh rằng *G* là trọng tâm tứ diện *ABCD*.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\,(1)$

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\,(2)$

Lấy $(2) + 3.(1)$ ta được $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC}$

LIVEWORKSHEETS

Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$

b) Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

c) Theo tính chất trung điểm ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GP}\\ \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GQ}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\left(\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow$ G là trọng tâm tứ diện *ABCD*.

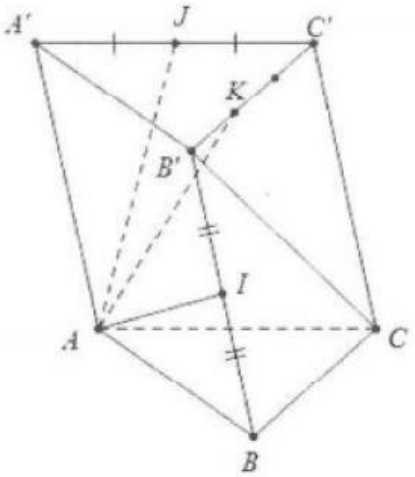
Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Gọi *I* và *J* lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$, điểm *K* thuộc $B'C$ sao cho $\overrightarrow{KC'}=-2\overrightarrow{KB'}$

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{BJ}$ qua 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo vectơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ từ đó suy ra 3 vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'B}$ (theo quy tắc hình bình hành)

Suy ra $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}=\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}$

Lại có: $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

Mặtkhác:

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'J}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'C'}=-\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\vec{b}+\vec{a}+\frac{c}{2}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}\,(1)$

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JC'}+\overrightarrow{C'K}\,(2)$

Lấy $2.(1)+(2)$ ta được:

$3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{JC'}+\underbrace{2\overrightarrow{B'K}+\overrightarrow{C'K}}_{0}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'J}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AJ}$

Vậy $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right)$.

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Gọi *M* và *N* lần lượt là hai điểm

LIVEWORKSHEETS

nằm trên AC và DC' sao cho $MN//BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$

Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D}$

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

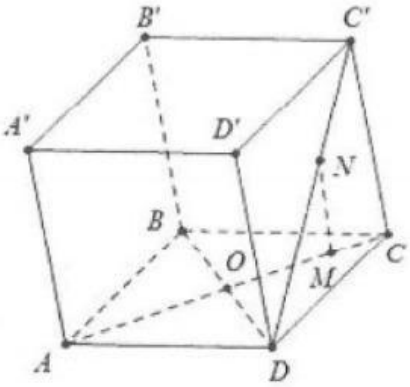
Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D}$

$= n.\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) + \vec{b} + m\left(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= n.\left(\vec{c} - \vec{a}\right) + \vec{b} + m\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}$

Khi đó $MN // BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}$$



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABB'A'$ và K là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $BCC'A$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{BD}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{IK}$ và $\overrightarrow{C'B'}$ từ đó suy ra ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{C'B'}$ đồng phẳng.

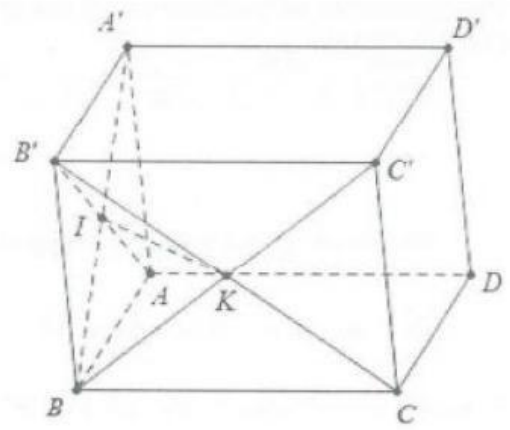
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{C'B} + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= -\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$ (vì $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}$)

Suy ra $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{C'B'} - 2\overrightarrow{IK}$

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{C'B'}$ đồng phẳng.



Ví dụ 6: Trong không gian cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, đồng thời , $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow (x+y+z)\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

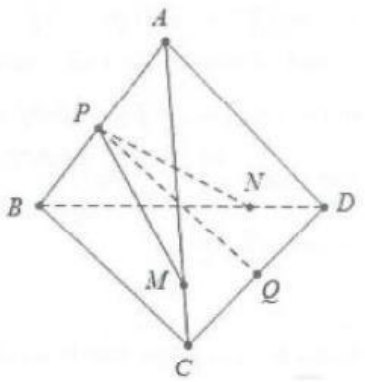
Nếu $x = 0 \Rightarrow\Leftrightarrow y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow$ M, B, C thẳng hàng nên A, B, C, M đồng phẳng

LIVEWORKSHEETS

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{-y}{x}\overrightarrow{MB} - \frac{z}{x}\overrightarrow{MC} \Rightarrow$ *A, B, C, M* đồng phẳng.

Ví dụ 7: Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *P* và *P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *CD*. Trên các cạnh *AB* và *CD* lần lượt lấy các điểm *M, N* sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k\left(k > 0\right)$. Chứng minh rằng 3 vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ đồng phẳng

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}\right) + \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}}{k}$

Lại có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN} \end{cases}$ nên $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\right)$

(Do $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$)

Do đó $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\right) \Rightarrow$ *M, N, P, Q* đồng phẳng

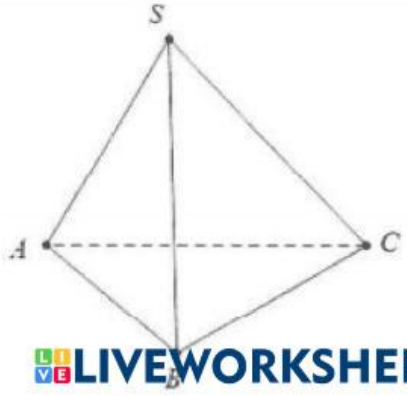
Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng, góc giữa hai vectơ, chứng minh 2 đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải:

- Để tính độ dài đoạn thẳng *AB* ta sử dụng công thức: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, để tính độ dài vectơ $\vec{u}$ ta sử dung công thức $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2}$
- Để tính góc giữa 2 vectơ ta sử dụng công thức: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$
- Để chứng minh 2 đường thẳng *AB* và *CD* vuông góc với nhau ta chứng minh: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* = *SB* = *SC* = *AB* = *AC* = *a* và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

Lời giải



Do *SB* = *SC* = *a*; $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S.

Lấy điểm *S* làm điểm gốc ta phân tích: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right).\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

LIVEWORKSHEETS

$= a^2.\cos 90^0 - a^2.\cos 60^0 = -\dfrac{a^2}{2}$

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}}{AB.SC} = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{a.a} = -\dfrac{1}{2}$

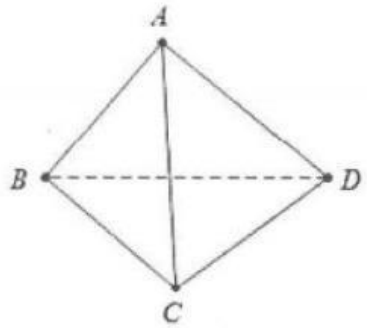
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right) = 120^0$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$

Lời giải



a) Lấy điểm A làm điểm gốc.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$

b) Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

Mặt khác: $\begin{cases} AB \perp CD \\ AC \perp DB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

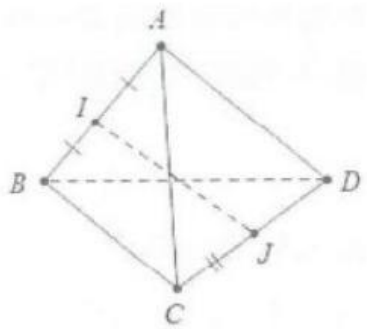
Do đó $AD \perp BC$

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và góc $BAC = 60^0$, góc $BAD = 60^0$, góc $CAD = 90^0$. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CD$

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$

Lời giải



a) Lấy điểm A là điểm gốc ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2\cos 60^0 - a^2\cos 60^0 = 0 \Rightarrow AB \perp CD$

b) Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$

Do đó $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AB}$

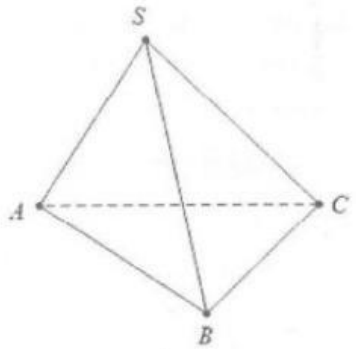
$= -\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\left(-\vec{a}^2 + a^2\cos 60^0 + a^2\cos 60^0\right) = 0 \Rightarrow IJ \perp AB$

LIVEWORKSHEETS

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$

Lời giải



Giả sử $ASB = BSC = CSA = \alpha$ và $SA = SB = SC = a$

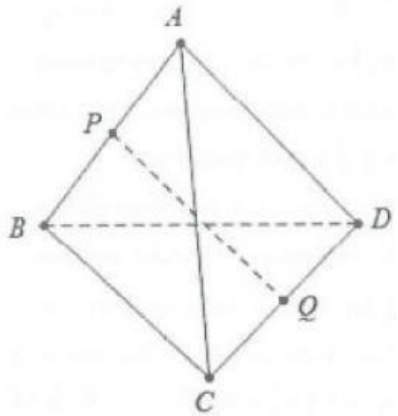
Lấy điểm S làm điểm gốc ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right)$

$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = a^2\cos\alpha - a^2\cos\alpha = 0$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết rằng $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

Lời giải



Ta có: $AB \perp AC, AB \perp BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$

Lại có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\right]$

$= \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.\overrightarrow{BD} = 0$

Do đó $AB \perp PQ$

Ví dụ 6: Trong không gian cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120^0. Biết rằng $\left|\vec{a}\right| = 3$ và $\left|\vec{b}\right| = 5$. Tính $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ và $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

Lời giải

Ta có: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) + \left|\vec{b}\right| = 3^2 + 2.3.5.\cos 120^0 + 5^2 = 19$

Do đó $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{19}$

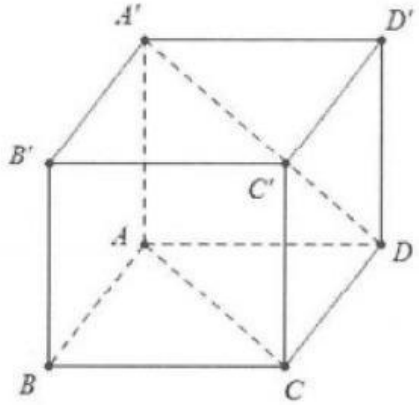
Lại có: $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) + \left|\vec{b}\right| = 3^2 - 2.3.5.\cos 120^0 + 5^2 = 49$

Do đó $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$

LIVEWORKSHEETS

Ví dụ 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ AC và DA'.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Đặt $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} = DA'$

Mặt khác $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{DA'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(-\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}\right) = -AD^2 = -a^2$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DA'}\right) = \dfrac{-a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DA'}\right) = -120^0$

LIVEWORKSHEETS

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương.

B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương,

C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ **C.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ **D.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AA_1}$ **D.** $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 5: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình hình hành

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Câu 6: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD, BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

B. Các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

LIVEWORKSHEETS

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ **D.** $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. TỪ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC.

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

D. Tìr $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ **B.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$ **D.** $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

Câu 12: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

A. $k = \frac{1}{2}$ **B.** $k = \frac{1}{3}$ **C.** $k = 3$ **D.** $k = 2$

Câu 14: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ ***ã,b, C***

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$

D. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

LIVEWORKSHEETS

Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung diểm BB'

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$

C. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$

D. M là trung điểm CC'

Câu 17: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$

A. $k=4$

B. $k=\frac{1}{2}$

C. $k=\frac{1}{4}$

D. $k=2$

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức sai?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$ **B.** $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$ **C.** $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$ **D.** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$ **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{c}-\vec{b}\right)$ **C.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$ **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$

LIVEWORKSHEETS

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tacó: $\vec{y}=-2\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=-2\vec{x}$ do đó 2 vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương. **Chọn B.**

Câu 2: Ta có: $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}=2\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)-\left(-3\vec{b}-2\vec{c}\right)=2\vec{y}-\vec{z}$

Do vậy 3 vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng. **Chọn A.**

Câu 3: *Ta có* $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. **Chọn C.**

Câu 4: Ta có: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{A_1C}$

Mặt khác $\overrightarrow{A_1C}\neq 0$ do dó đẳng thức ở câu C sai. **Chọn C.**

Câu 5: Ta có: $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Do dó $ABCD$ là hình bình hành. **Chọn C.**

Câu 6: A, B, C, D tạo thành hình bình hành

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$. **Chọn C.**

Câu 7: Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ không đồng phẳng nên C sai. **Chọn C.**

Câu 8: Ta có $\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$. **Chọn C.**

Câu 9: Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. **Chọn C.**

Câu 10: Do G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MG}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$. **Chọn A.**

Câu 11: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+2\overrightarrow{GO}=2\overrightarrow{GO}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{GO}$. **Chọn B.**

Câu 12: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **Chọn D.**

Câu 13: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\rightarrow\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 14: $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CC'}=-\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **Chọn D.**

Câu 15: Dựa váo các đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $ABCD$ là hình bình hành thì O là trung điểm của AC và BD, khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ và điều ngược lại luôn đúng.

- Tương tự, $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang và điều ngược lại không đúng. **Chọn C.**

LIVEWORKSHEETS

Câu 16: Ta có $\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Mặt khác $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\Rightarrow\begin{cases}OM\,//\,\text{BD}\\ \text{OM}=\frac{1}{2}BD\end{cases}$. Mà O là trung điểm của DB' suy ra M là trung điểm của BB'. **Chọn A.**

Câu 17: Vì I là trung điểm của $MN\Rightarrow\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+IC=4\overrightarrow{PI}+2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}=4\overrightarrow{PI}$

Khi đó $4\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\Leftrightarrow\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)\Rightarrow k=\frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 18: Dựa vào đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$
- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}$
- $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}$

Chọn D.

Câu 19: Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Chọn B

Câu 20: Ta có $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$. **Chọn D.**

LIVEWORKSHEETS