

CHỦ ĐỀ 3: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

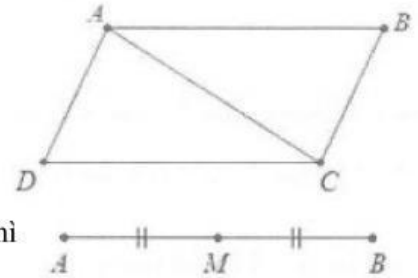
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa:

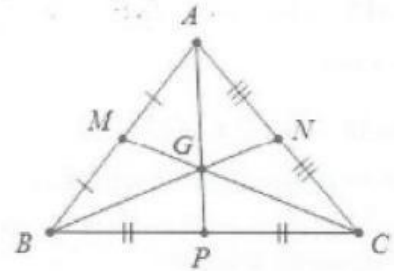
Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

2. Các quy tắc về vectơ

- **Quy tắc 3 điểm:** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ hoặc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành $ACBD$ ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- **Quy tắc trung điểm:** Nếu M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- **Quy tắc trung tuyến:** Nếu AP là trung tuyến của tam giác ABC thì $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



Tương tự hình bên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$$



- **Quy tắc trọng tâm:** Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Khi đó với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

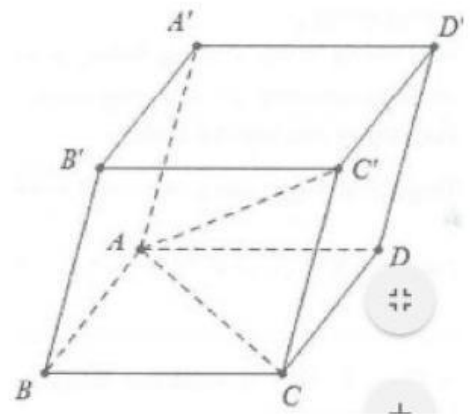
Chứng minh:

Ta có: $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

Tương tự: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ suy ra $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Chú ý: Nếu G là trọng tâm tứ diện $ABCD$, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$



3. Sự đồng phẳng của các vectơ, điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định nghĩa: Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

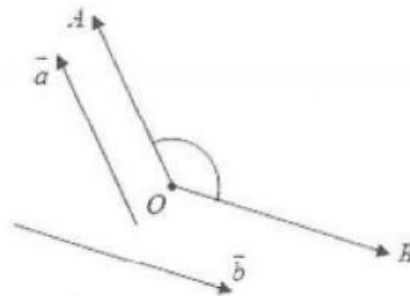
- **Định lý 1:** Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hoặc tồn tại các số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

- **Định lý 2:** Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vector không đồng phẳng thì với mỗi vector $\vec{d}$ trong không gian, ta tìm được các số m, n, p duy nhất sao cho

4. Tích vô hướng của 2 vector

Góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ được định nghĩa bằng góc AOB với $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Nếu $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước góc giữa chúng có thể nhận một giá trị tùy ý.



Tích vô hướng giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, được kí

hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và được xác định bởi $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$ từ đó suy ra cosin góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Đặc biệt khi $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Tính chất: Cho 3 vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k . Khi đó ta có:

- i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ii) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- iii) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- iv) $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Vector chỉ phương của đường thẳng:

Vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vector $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d

Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vector chỉ phương $\vec{a}$ của đường thẳng d .

Ứng dụng của tích vô hướng

Tính độ dài đoạn thẳng AB : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

Xác định góc giữa hai vector: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh các đẳng thức vector, chứng minh 3 vector đồng phẳng.

Phương pháp giải:

Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.

• Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng: tồn tại các số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì 3 vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Để biểu diễn vector $\vec{x}$ theo 3 vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta tìm được các số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

- Hãy biểu diễn vector $\vec{IJ}$ theo 3 vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$
- Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn vector $\vec{AG}$ theo 3 vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{AJ})$, mặt khác $\vec{IA} = -\vec{AI} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

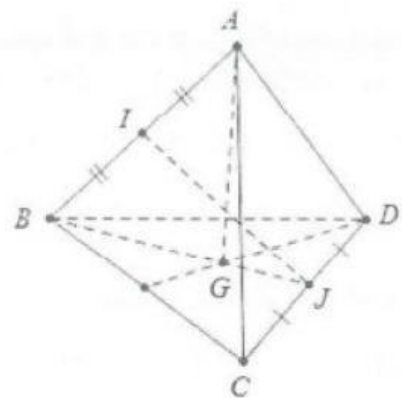
$\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$ (tính chất trung điểm)

Do đó $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

b) Ta có:
$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} \\ \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{GC} \\ \vec{AD} = \vec{AG} + \vec{GD} \end{cases}$$
 cộng vế theo vế ta được:

$3\vec{AG} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$

Mặt khác $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ (do G là trọng tâm tam giác BCD). Do vậy $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{3}$



Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\vec{AM} = 3\vec{MD}$, $\vec{NB} = -3\vec{NC}$. Biết $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{CD} = \vec{b}$.

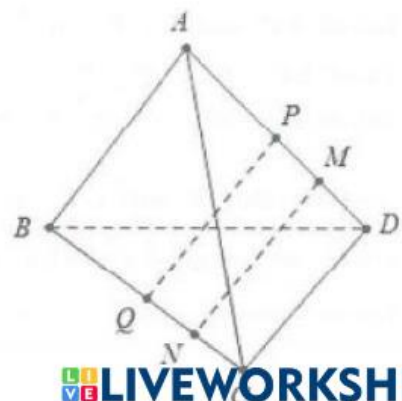
- Hãy biểu diễn vector $\vec{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng ba vector $\vec{MN}, \vec{DC}, \vec{PQ}$ đồng phẳng.
- Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN}$ (1)

Lại có: $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}$ (2)

Lấy (2) + 3.(1) ta được $4\vec{MN} = \vec{AB} + 3\vec{DC}$



Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

b) Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow$ ba vector $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

c) Theo tính chất trung điểm ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

Mặt khác $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$, điểm K thuộc $B'C$ sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$

- a) Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{BJ}$ qua 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$
 b) Biểu thị vector $\overrightarrow{AK}$ theo vector $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ từ đó suy ra 3 vector $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}$ (theo quy tắc hình bình hành)

Suy ra $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

Lại có: $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

Mặt khác:

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'J} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'C'} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

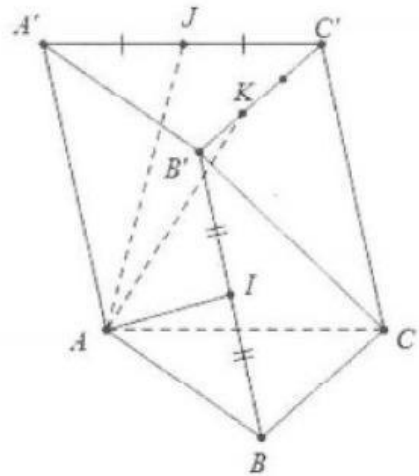
b) Ta có: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$ (1)

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{C'K}$$
 (2)

Lấy 2.(1)+(2) ta được:

$$3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{JC'} + \underbrace{2\overrightarrow{B'K} + \overrightarrow{C'K}}_0 = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AJ}$$

Vậy
$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}).$$



Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm

nằm trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$

Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D}$

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

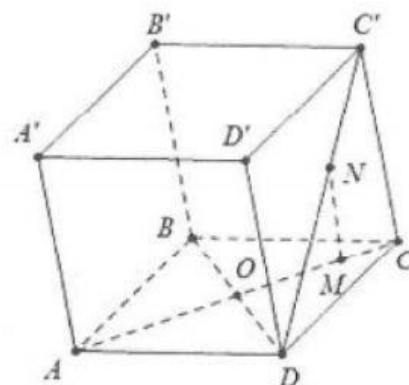
Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D}$

$$= n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \vec{b} + m(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD})$$

$$= n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(-\vec{b} + \vec{a}) = (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c}$$

Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}$$



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABB'A'$ và K là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $BCC'A$. Biểu thị vector $\overrightarrow{BD}$ theo 2 vector $\overrightarrow{IK}$ và $\overrightarrow{C'B'}$ từ đó suy ra ba vector $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{C'B'}$ đồng phẳng.

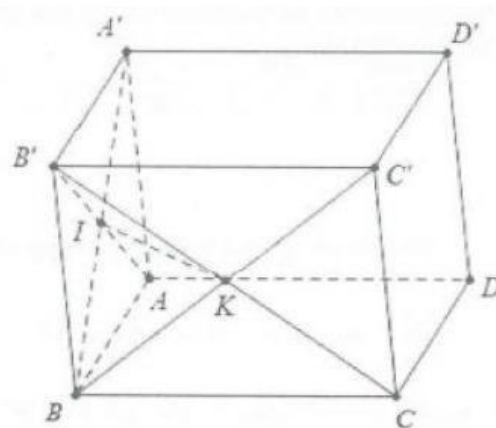
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{C'B} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$$= -\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK})$$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{C'B'} - 2\overrightarrow{IK}$

Do đó ba vector $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{C'B'}$ đồng phẳng.



Ví dụ 6: Trong không gian cho tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, đồng thời, $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow (x + y + z)\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

$$\Leftrightarrow x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M, B, C$ thẳng hàng nên A, B, C, M đồng phẳng

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{-y}{x} \overrightarrow{MB} - \frac{z}{x} \overrightarrow{MC} \Rightarrow A, B, C, M$ đồng phẳng.

Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Trên các cạnh AC và BD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k (k > 0)$. Chứng minh rằng 3 vector $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng

Lời giải

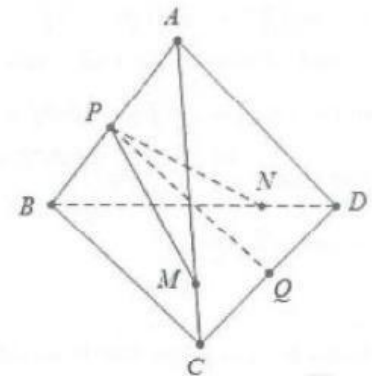
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP})] = \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}}{k}$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN} \end{cases} \text{ nên } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN})$$

$$(\text{Do } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \Rightarrow M, N, P, Q \text{ đồng phẳng}$$



Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng, góc giữa hai vector, chứng minh 2 đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải:

- Để tính độ dài đoạn thẳng AB ta sử dụng công thức: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB^2}$, để tính độ dài vector $\vec{u}$ ta sử dụng công thức $|\vec{u}| = \sqrt{u^2}$
- Để tính góc giữa 2 vector ta sử dụng công thức: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- Để chứng minh 2 đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

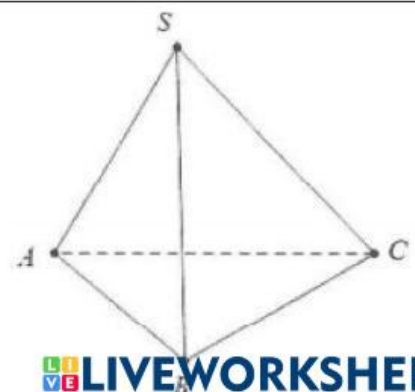
Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

Do $SB = SC = a$; $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

Lấy điểm S làm điểm gốc ta phân tích: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$$



$$= a^2 \cdot \cos 90^\circ - a^2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{AB \cdot SC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SC}) = 120^\circ$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$.

- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- Từ đẳng thức trên hãy suy ra nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$

Lời giải

- Lấy điểm A làm điểm gốc.

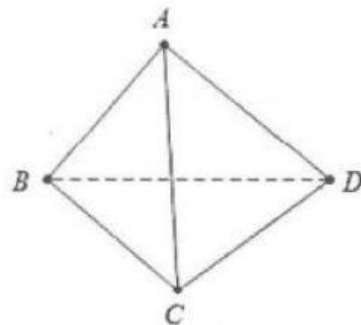
Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

- Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} AB \perp CD \\ AC \perp DB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Do đó $AD \perp BC$



Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và góc $BAC = 60^\circ$, góc $BAD = 60^\circ$, góc $CAD = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

- $AB \perp CD$
- Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$

Lời giải

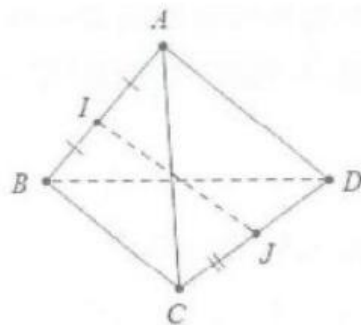
$$\begin{aligned} \text{a) Lấy điểm } A \text{ là điểm gốc ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \cos 60^\circ - a^2 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow AB \perp CD \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= -\frac{1}{2}(-a^2 + a^2 \cos 60^\circ + a^2 \cos 60^\circ) = 0 \Rightarrow IJ \perp AB$$



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$

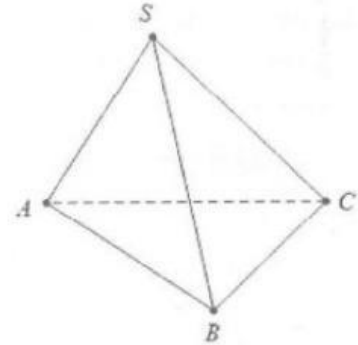
Lời giải

Giả sử $ASB = BSC = CSA = \alpha$ và $SA = SB = SC = a$

Lấy điểm S làm điểm gốc ta có: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

$$= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = a^2 \cos \alpha - a^2 \cos \alpha = 0$$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$



Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Biết rằng $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

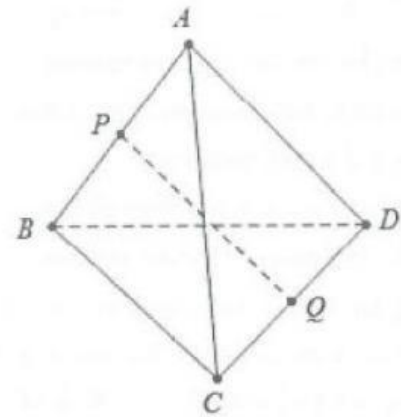
Lời giải

$$\text{Ta có: } AB \perp AC, AB \perp BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \right] \\ &= \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{aligned}$$

Do đó $AB \perp PQ$



Ví dụ 6: Trong không gian cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 3$ và $|\vec{b}| = 5$.

Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}|$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 19$$

$$\text{Do đó } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$$

$$\text{Lại có: } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 49$$

$$\text{Do đó } |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

Ví dụ 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DA'}$.

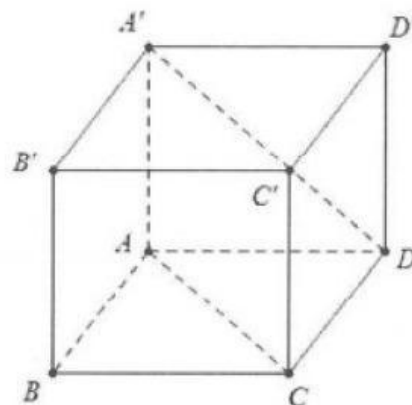
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Đặt $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} = DA'$

Mặt khác $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = -AD^2 = -a^2$

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DA'}) = \frac{-a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DA'}) = 120^\circ$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hai vector $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương. B. Hai vector $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương,
C. Hai vector $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương. D. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. B. Hai vector $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
C. Hai vector $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương. D. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 5: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Câu 6: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD, BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng. B. Các vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
C. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng. D. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$

D. $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

Câu 12: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

A. $k = \frac{1}{2}$

B. $k = \frac{1}{3}$

C. $k = 3$

D. $k = 2$

Câu 14: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{B'C}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$

D. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có: $\vec{y} = -2(2\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{x}$ do đó 2 vector $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương. **Chọn B.**

Câu 2: Ta có: $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - (-3\vec{b} - 2\vec{c}) = 2\vec{y} - \vec{z}$

Do vậy 3 vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. **Chọn A.**

Câu 3: Ta có $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{0}$. **Chọn C.**

Câu 4: Ta có: $\vec{AC_1} + \vec{A_1C} = \vec{AA_1} + \vec{A_1C} + \vec{A_1C} = \vec{AA_1} + 2\vec{A_1C}$

Mặt khác $\vec{A_1C} \neq \vec{0}$ do đó đẳng thức ở câu C sai. **Chọn C.**

Câu 5: Ta có: $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC} \Leftrightarrow \vec{SB} - \vec{SA} = \vec{SC} - \vec{SD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

Do đó $ABCD$ là hình bình hành. **Chọn C.**

Câu 6: A, B, C, D tạo thành hình bình hành

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{DO} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{DO} = \vec{OC} - \vec{AO} \Leftrightarrow \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{OA}$. **Chọn C.**

Câu 7: Các vector $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{PQ}$ không đồng phẳng nên C sai. **Chọn C.**

Câu 8: Ta có $\vec{AD} \neq \vec{CD} \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{AD} \neq \vec{AC} \cdot \vec{CD}$. **Chọn C.**

Câu 9: Vì $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. **Chọn C.**

Câu 10: Do G là trung điểm của MN nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{MA} - \vec{MG}) + (\vec{MB} - \vec{MG}) + (\vec{MC} - \vec{MG}) + (\vec{MD} - \vec{MG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$. **Chọn A.**

Câu 11: $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GS} + 2\vec{GO} = 2\vec{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GS} = 4\vec{GO}$. **Chọn B.**

Câu 12: $\vec{BC'} = \vec{BC} + \vec{CC'} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CC'} = \vec{AA'} - \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. **Chọn D.**

Câu 13: $\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD} + \vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{MN} = -\frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) + \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BD}) + \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}) \rightarrow \vec{MN} = k(\vec{AC} + \vec{BD}) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 14: $\vec{B'C} = \vec{B'C'} + \vec{C'C} = \vec{BC} - \vec{CC'} = \vec{BA} + \vec{AC} - \vec{CC'} = -\vec{AA'} - \vec{AB} + \vec{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. **Chọn D.**

Câu 15: Dựa vào các đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $ABCD$ là hình bình hành thì O là trung điểm của AC và BD , khi đó
$$\begin{cases} \vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO} \\ \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ và điều ngược lại luôn đúng.

- Tương tự, $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang và điều ngược lại không đúng. **Chọn C.**

Câu 16: Ta có $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Mặt khác $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow \begin{cases} OM // BD \\ OM = \frac{1}{2}BD \end{cases}$. Mà O là trung điểm của DB' suy ra M là trung

điểm của BB' . **Chọn A.**

Câu 17: Vì I là trung điểm của $MN \Rightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{PI} + 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IN} = 4\overrightarrow{PI}$

Khi đó $4\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 18: Dựa vào đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1}$

Chọn D.

Câu 19: Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Chọn B

Câu 20: Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$. **Chọn D.**