

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

FÓRMULA: $U = ax + b$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.-
$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$1 + 2x = t^3 \implies x = \frac{t^3 - 1}{2}$$

$$2dx = 3t^2 dt \implies dx = \frac{3t^2 dt}{2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx &= \int \frac{\left(\frac{t^3 - 1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2 dt}{2} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{t^6 - 2t^3 + 1}{4} \cdot t dt \\ &= \frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt \end{aligned}$$

Resolvemos la integral obtenida

$$\frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt = \frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt[3]{1+2x}$

$$\frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2$$

Así, la solución en término de la variable inicial es

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

2.-
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$x^2 + 1 = t^2 \implies x = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$2x dx = 2t dt \implies dx = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{(\sqrt{t^2-1})^3}{t} \cdot \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} \\ &= \int \frac{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \int (t^2-1) dt \end{aligned}$$

Resolvemos la integral obtenida

$$\int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\frac{t^3}{3} - t = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2 + 1})^3 - \sqrt{x^2 + 1}$$

Así, la solución en término de la variable inicial es

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2 + 1})^3 - \sqrt{x^2 + 1} + C$$

3.-
$$\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x + 2}}$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$x + 2 = t^2 \implies x = t^2 - 2$$

$$dx = 2t dt$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x + 2}} &= \int \frac{2t dt}{(t^2 - 4)t} \\ &= \int \frac{2}{t^2 - 4} dt \end{aligned}$$

Resolvemos la integral obtenida empleando fracciones parciales

$$\frac{2}{t^2 - 4} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t + 2} \implies 2 = A(t + 2) + B(t - 2)$$

$$t = -2 \implies B = -\frac{1}{2}$$

$$t = 2 \implies A = \frac{1}{2}$$

La integral es

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{t^2 - 4} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(t - 2) - \frac{1}{2} \ln(t + 2) + C \end{aligned}$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt{x + 2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(t - 2) - \frac{1}{2} \ln(t + 2) &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x + 2} - 2) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x + 2} + 2) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 2} + 2}\right) \end{aligned}$$

Así, la solución en termino de la variable inicial es

$$\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x + 2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 2} + 2}\right) + C$$

4.-
$$\int x\sqrt{1+x} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$1+x = t^2 \implies x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt \\ &= 2 \int (t^4 - t^2) dt \end{aligned}$$

Resolvemos la integral obtenida

$$2 \int (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt{1+x}$

$$\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3$$

Así, la solución en término de la variable inicial es

$$\int x\sqrt{1+x} dx = \frac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 + C$$

5.-
$$\int \frac{4e^{3x}}{1 + e^{2x}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$e^x = t \implies x = \ln t$$

$$e^x dx = dt \implies dx = \frac{dt}{t}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int \frac{4e^{3x}}{1 + e^{2x}} dx &= 4 \int \frac{t^3}{1 + t^2} \cdot \frac{dt}{t} \\ &= 4 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt \\ &= 4 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt \\ &= 4 \left(\int dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \right) \end{aligned}$$

Resolvemos la integral obtenida

$$4 \left(\int dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \right) = 4(t - \arctan t) + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = e^x$

$$4(t - \arctan t) = 4(e^x - \arctan e^x)$$

Así, la solución en término de la variable inicial es

$$\int \frac{4e^{3x}}{1 + e^{2x}} dx = 4(e^x - \arctan e^x) + C$$

Realiza los siguientes ejercicios según los ejemplos anteriores.

1.-
$$\int \frac{e^{4x} + 3}{e^{3x}} dx$$

2.-
$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx$$

3.-
$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$$