

INTEGRACIÓN POR PARTES

FÓRMULA: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- $\int x \cos x \, dx$

Elegimos $u = x$, $v' = \cos x$ y calculamos u' y v

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \sin x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

2.- $\int e^{3x} \sin 2x \, dx$

Elegimos $u = e^{3x}$, $v' = \operatorname{sen} 2x$ y calculamos u' y v

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \operatorname{sen} 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

La última integral obtenida se resuelve mediante integración por partes , por ello elegimos $u = e^{3x}$, $v' = \cos 2x$ y calculamos u' y v

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \cos 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes y obtenemos

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Sustituimos el resultado obtenido del paso 4, en el resultado del paso 2 y resolvemos la ecuación resultante

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx \\ \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx \right) \\ \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx + \frac{9}{4} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \operatorname{sen} 2x \\ \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{4}{13} \left(-\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \operatorname{sen} 2x \right) + C \\ \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{1}{13}e^{3x} (-2\cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x) + C\end{aligned}$$

3.- $\int \operatorname{arc} \cot g x \, dx$

Elegimos $u = \operatorname{arc} \cot g x$, $v' = 1$ y calculamos u' y v

$$u = \operatorname{arc} \cot g x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc} \cot g x \, dx &= x \operatorname{arc} \cot g x + \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arc} \cot g x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

4.-
$$\int \arccos x \, dx$$

Elegimos $u = \arccos x$, $v' = 1$ y calculamos u' y v

$$u = \arccos x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int \arccos x \, dx &= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

5.-
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$$

Elegimos $u = x$, $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ y calculamos u' y v

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{tg} x$$

Sustituimos los valores de u' y v en la fórmula de integración por partes considerando $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \\ &= x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C\end{aligned}$$

Realiza los siguientes ejercicios según los ejemplos anteriores.

1.-

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$$

2.-

$$\int \ln^2 x \, dx$$

3.-

$$\int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} dx$$