Grafik Fungsi Rasional

1. Fungsi Rasional Linier

Definisi: ***Bilangan rasional*** adalah bilangan yang dapat di bentuk $\frac{a}{b}; b \neq 0; a, b \in Z$. Sedangkan fungsi rasional linier adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan riil x pada fungsi yang dirumuskan dengan

$$f : x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \frac{ax+b}{px+q}; \quad \text{dimana} \quad x \neq \frac{-q}{p}$$

Untuk melukis grafik fungsi rasional linier diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Titik potong dengan sumbu x

$y = 0 \quad \rightarrow \quad ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

b) Titik potong dengan sumbu y

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{q}$

Koordinat titik potong adalah $\left(0, \frac{b}{q}\right)$

c) Asimtot Datar

Asimtot adalah garis lurus yang makin didekati oleh grafik fungsi bahkan sampai berhimpit dengan grafik tersebut untuk nilai x atau y tak hingga tetapi tidak sampai memotong garis tersebut. Untuk beberapa kasus, asimtot mungkin dipotong oleh grafik pada x atau y berhingga, tetapi akan berhimpit untuk x atau y tak hingga.

$x \rightarrow \infty \; maka \;\; y = \lim_{x \to \infty} \frac{ax+b}{px+q} = \frac{a}{p}$

d) Asimtot Tegak

LIVEWORKSHEETS

$y \to \infty$ maka $px + q \to 0$

$\therefore\ px + q = 0$

$$x = -\frac{q}{p}$$

e) Titik bantu pada sumbu x

x	$-n$	...	0	...	n
y					

Contoh 1:

Lukislah grafik fungsi $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$

Penyelesaian:

Langkah-langkah melukis grafik fungsi rasional adalah sbb:

1. Titik potong pada sumbu x

   $y = 0 \to x = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
2. Titik potong pada sumbu y

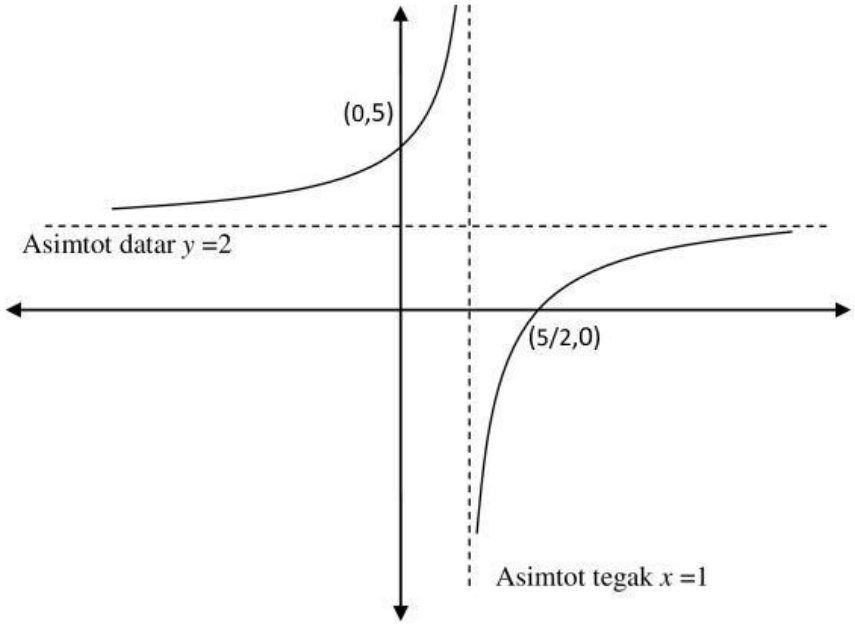
   x=0→ $y = \frac{-5}{-1} = 5$ (0,5)
3. Asimtot datar

   $x \to \infty$ maka $y = \frac{a}{p} = \frac{2}{1} = 2$
4. Asimtot tegak

   $y = \infty$ maka $x = -\frac{q}{p} = -\frac{-1}{1} = 1$
5. Titik Bantu

x	-3	-2	-1	2	3	4
y	2,75	3	3,5	-1	0,5	1

LIVEWORKSHEETS



2. Fungsi Rasional dengan Bentuk

$$f : x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}; \quad \text{dimana } a, p, \text{dan } px^2+qx+r \neq 0;$$

$$ax+b \text{ bukan faktor dari } px^2+qx+r$$

Untuk melukis grafik fungsi rasional dengan bentuk di atas diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Titik potong dengan sumbu x

$y = 0 \rightarrow \quad ax+b=0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

b) Titik potong dengan sumbu y

$x = 0 \rightarrow \quad y = \frac{b}{r}$

Koordinat titik potong adalah $\left(0, \frac{b}{r}\right)$

c) Asimtot Datar

$$x \rightarrow \infty \; maka \;\; y = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{px^2+qx+r} = \frac{0}{p} = 0$$

LIVEWORKSHEETS

d) Asimtot Tegak

$y \to \infty$ maka $px^2 + qx + r \to 0$

$$px^2 + qx + r = 0$$

$\therefore$ Asimtot tegak diperoleh dari faktor $px^2 + qx + r = 0$

e) Nilai Ekstrim

Nilai ekstrim y diperoleh jika x riil. Agar nilai x riil maka

$D \geq 0$

$$y = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}$$

$$ypx^2 + yqx + yr = ax + b$$

$$ypx^2 + (yq - a)x + (yr - b) = 0$$

karena syarat $D \geq 0$ maka

$$(yq-a)^2 - 4.yp.(yr-b) \geq 0$$

f) Titik bantu pada sumbu x

x	$-n$	...	0	...	n
y					

***Contoh 2*:**

Lukislah grafik fungsi $y = \dfrac{x-1}{2x^2+x-1}$

***Penyelesaian*:**

Langkah-langkah melukis grafik fungsi rasional adalah sbb:

1. Titik potong pada sumbu x

   $y = 0 \to x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$ (1,0)

2. Titik potong pada sumbu y

   x=0→ $y = \frac{b}{r} = \frac{-1}{-1} = 1$ (0,1)

3. Asimtot datar

   $x \to \infty$ maka $y = \frac{a}{p} = \frac{0}{2} = 0$

4. Asimtot tegak

   $y = \infty$ maka $px^2 + qx + 0$

   $2x^2 + x - 1 = 0$

   $(2x-1)(x+1) = 0$

   $x = \frac{1}{2} \cup x = -1$

   Jadi, asimtot tegak pada $x = \frac{1}{2}$ dan $x = -1$

LIVEWORKSHEETS

5. Nilai ekstrim

$$y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$$
$$2yx^2 + yx - y = x - 1$$
$$2yx^2 + (y-1)x + (-y+1) = 0$$
$$D \geq 0$$
$$(y-1)^2 - 4(2y)(-y+1) \geq 0$$
$$9y^2 - 10y + 1 \geq 0$$
$$(9y-1)(y-1) \geq 0$$
$$y = 1/9 \cup y = 1$$

untuk $y = 1 \rightarrow 1 = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$

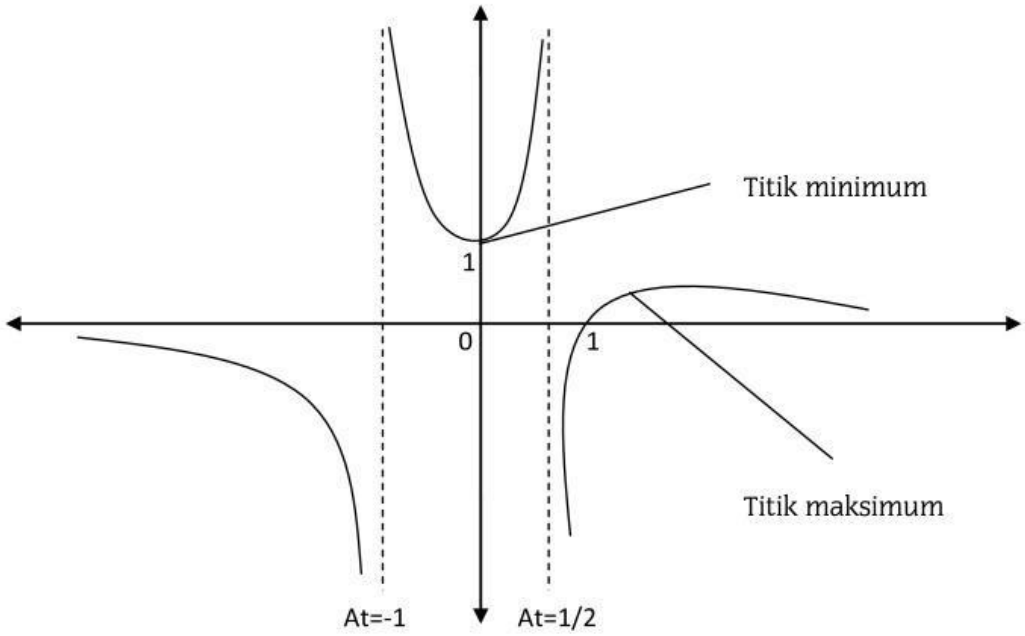
$$2x^2 + x - 1 = x - 1$$
$$x = 0 \qquad (0,1)$$

untuk $y = 1/9 \rightarrow 1/9 = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$

$$2x^2 + x - 1 = 9x - 9$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)(x-2) = 0$$
$$x = 2 \qquad (2, 1/9)$$

6. Titik Bantu

x	-2	-1,5	-1/2	1/4	3/4	2	3
y	-3/5	-5/4	3/2	6/5	-2/7	1/9	1/10



LIVEWORKSHEETS

3. Fungsi Rasional dengan bentuk

$$f : x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}; \text{ dimana } a, p, \text{dan } px^2 + qx + r \neq 0;$$

Untuk melukis grafik fungsi rasional dengan bentuk di atas diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Titik potong dengan sumbu *x*

$y = 0 \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$

Nilai x didapat dari faktor $ax^2 + bx + c = 0$

Koordinat titik potongadalah $(x_1, 0)$ *dan* $(x_2, 0)$

b) Titik potong dengan sumbu *y*

$x = 0 \rightarrow \quad y = \frac{c}{r}$

Koordinat titik potongadalah $\left(0, \frac{c}{r}\right)$

c) Asimtot Datar

$$x \rightarrow \infty \; maka \;\; y = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \frac{a}{p}$$

d) Asimtot Tegak

$y \rightarrow \infty$ maka $px^2 + q + r \rightarrow 0$

$px^2 + qx + r = 0$

$\therefore$ Asimtot tegak diperoleh dari faktor $px^2 + qx + r = 0$

e) Nilai Ekstrim

Nilai ekstrim *y* diperoleh jika *x* riil. Agar nilai *x* riil maka $D \geq 0$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

$ypx^2 + yqx + yr = ax^2 + bx + c$

$(yp - a)x^2 + (yq - b)x + (yr - c) = 0$

karena syarat $D \geq 0$ maka

$(yq - b)^2 - 4.(yp - a).(yr - c) \geq 0$

f) Titik bantu pada sumbu *x*

x	$-n$	…	0	…	n
y					

LIVEWORKSHEETS

LATIHAN:

1. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \dfrac{x+4}{x-2}$

LIVEWORKSHEETS

2. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \dfrac{3x-1}{3-x}$

LIVEWORKSHEETS

3. Tentukan persamaan fungsi rasional jika diketahui asimtot tegak $x = 1$, asimtot datar $y = 0$, dan titik potong pada sumbu y (0,-2).

4. Tentukan persamaan fungsi rasional jika diketahui asimtot datar $y = 3$, asimtot tegak $x = -2$, titik potong pada sumbu y (0, -1) dan melalui titik (1,0).

LIVEWORKSHEETS

5. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \dfrac{x-1}{2x^2+x-1}$

LIVEWORKSHEETS

6. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$

LIVEWORKSHEETS

Catatan:

LIVEWORKSHEETS