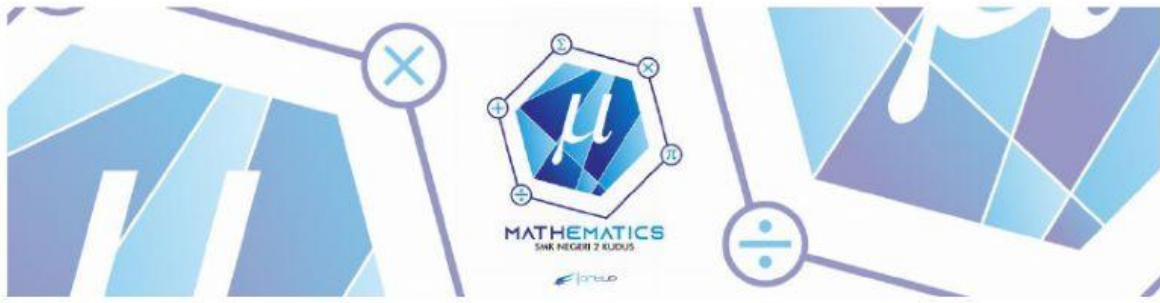




1. Integral Tak Tentu

Petunjuk Pembelajaran

- Pahami dan catat kembali materi pada modul interaktif ini.
- Lengkapi kotak yang tersedia pada contoh soal dengan menggunakan bilangan bulat atau variabel atau operasi keduanya.

Contoh:

- Setelah selesai klik [Finish](#) kemudian [Email my answer to my teacher](#).

3.1. Pengertian Integral

Limit, turunan, dan integral merupakan bagian yang tak dapat dipisahkan dan saling berhubungan. Pengertian limit digunakan dalam pengertian dasar penyelesaian turunan. Sedangkan integral sering disebut sebagai anti turunan.

Sebagai contoh, turunan dari fungsi $f(x) = x^3$ adalah $f'(x) = 3x^2$. Dapat dikatakan bahwa $f(x)$ adalah **anti turunan (integral)** dari $f'(x)$. Atau dapat dirumuskan sebagai berikut:

Suatu Fungsi F dikatakan sebagai anti turunan dari fungsi f jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x dalam domain F .

Karena turunan konstanta adalah nol, maka setiap bentuk $F(x) + C$ dengan sembarang konstanta juga merupakan anti turunan dari $F'(x)$ atau $f(x)$. Hasil pengintegralan $f(x)$ dengan berbentuk $F(x) + C$ disebut **integral sembarang (integral tak tentu)**, ditulis sebagai berikut:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

atau

$$\int F'(x) dx = F(x) + C$$

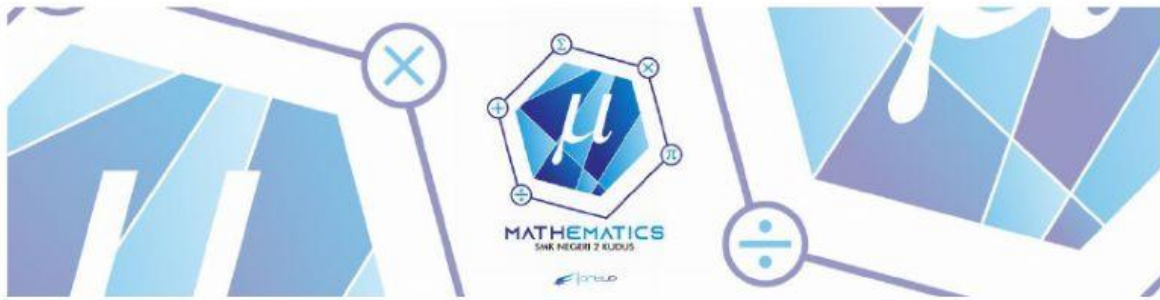
NOTES:

$F(x)$ maupun $f(x)$ hanyalah merupakan variasi penamaan suatu fungsi. Jika notasi turunan suatu fungsi dituliskan $f''(x)$ maka anti turunannya adalah $f'(x)$, begitu pula jika notasi turunan suatu fungsi dituliskan $F'(x)$ maka anti turunannya adalah $F(x)$.

Jika diketahui sebuah fungsi $y = ax^n$, maka integralnya dapat dirumuskan:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

dengan n bilangan rasional dan $n \neq -1$.



Contoh 1:

Tentukan tiap integral berikut!

a. $\int 12x^3 dx$

b. $\int \frac{2}{x^2} dx$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\int 12x^3 dx = \frac{12}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{12}{4} x^4 + C = 3x^4 + C$

b. $\int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = \frac{2}{-2+1} x^{-2+1} + C = \frac{2}{-1} x^{-1} + C = -2 \cdot x^{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$

3.2. Sifat-sifat Integral Tak Tentu

Beberapa sifat integral tak tentu adalah sebagai berikut:

- (i) $\int a dx = ax + C$; a adalah konstanta.
- (ii) $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$; a adalah konstanta.
- (iii) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- (iv) $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Contoh 2:

Tentukan tiap integral berikut!

a. $\int 18x^3 - 25x^4 + 3x^2 dx$

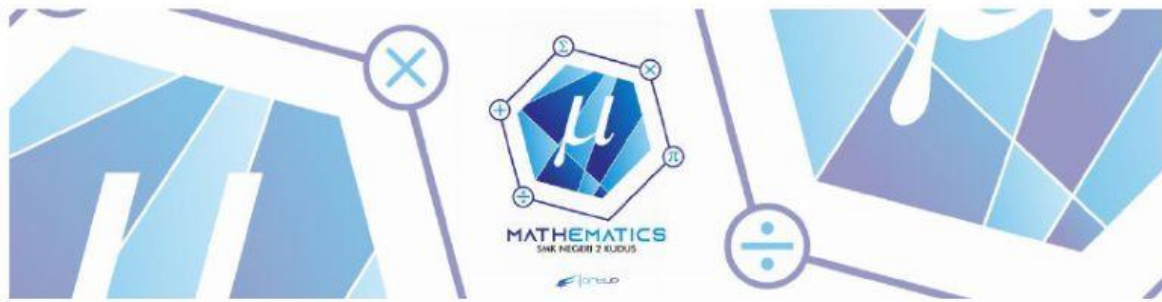
b. $\int (x+1)^2 dx$

c. $\int (x-1)(x+2) dx$

d. $\int \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} \right) dx$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\int 18x^3 - 25x^4 + 3x^2 dx = \int 18x^3 dx - \int 25x^4 dx + \int 3x^2 dx$
 $= \frac{18}{3+1} x^{3+1} - \frac{25}{4+1} x^{4+1} + \frac{3}{2+1} x^{2+1} + C$
 $= \frac{18}{4} x^4 - \frac{25}{5} x^5 + \frac{3}{3} x^3 + C$
 $= \frac{9}{2} x^4 - 5x^5 + x^3 + C$



$$\begin{aligned}
 \text{b. } \int (x+1)^2 dx &= \int (x^2 + 2x + 1) dx \\
 &= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int 1 dx \\
 &= \frac{1}{\square+1} x^{\square+1} + \frac{2}{\square+1} x^{\square+1} + \square + C \\
 &= \frac{1}{\square} x^{\square} + x^{\square} + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \int (x-1)(x+2) dx &= \int (x^2 + x - 2) dx \\
 &= \int x^2 dx + \int x dx - \int 2 dx \\
 &= \frac{1}{\square+1} x^{\square+1} + \frac{1}{\square+1} x^{\square+1} - \square x + C \\
 &= \frac{1}{\square} x^{\square} + \frac{1}{\square} x^{\square} - \square x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \int \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} \right) dx &= \int \frac{2x^3}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \int 2x - 3 + x^{\square} dx = \int \square dx - \int \square dx + \int \square^{\square} dx \\
 &= \frac{2}{\square+1} x^{\square+1} - \square + \frac{1}{\square+1} x^{\square+1} + C \\
 &= \frac{2}{\square} x^{\square} - \square + \frac{1}{\square} x^{\square} + C \\
 &= x^2 - \square \square \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

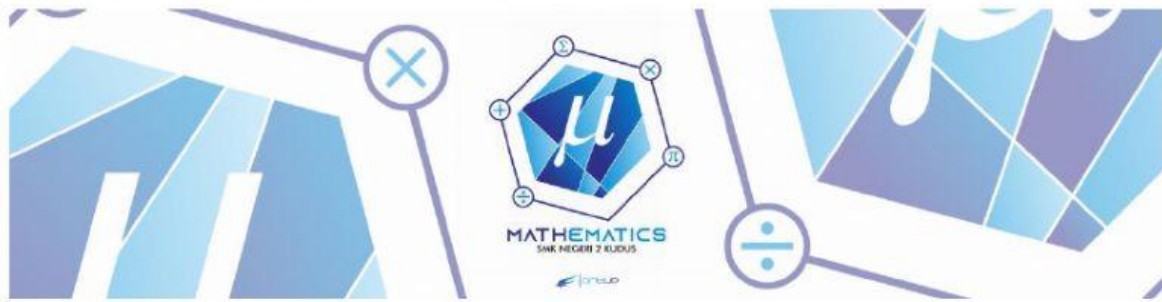
Konstanta C dapat ditentukan nilainya jika nilai variabel x dan $f(x)$ dari $\int f'(x) dx$ telah diketahui. Nilai C diperoleh dengan mensubstitusi kedua nilai variabel yang bersesuaian tersebut ke dalam hasil pengintegralan.

Contoh 3:

Diketahui $f'(x) = 2x - 4$ dan $f(3) = 6$. Tentukan fungsi $f(x)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int 2x - 4 dx = \int \square dx - \int \square dx \\
 &= \frac{\square}{\square+1} x^{\square+1} - \square + C = x^{\square} - \square + C
 \end{aligned}$$



$$f(3) = 6$$

$$\square^{\square} - \square \cdot \square + C = 6$$

$$\square - \square + C = 6$$

$$\square + C = 6$$

$$C = 6 \square \square = \square$$

$$\text{Jadi, } f(x) = \square^{\square} - \square \square \square$$