

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

Satuan Pendidikan : SMA/MA Sederajat
Nama Sekolah : SMA Negeri 5 Bengkulu Selatan
Kelas/Semester : XI/Genap
Mata Pelajaran : Matematika
Pokok Bahasan : Transformasi Geometri

Nama :

Kelas :



A. Kompetensi Dasar

- 3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks
- 4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)



B. Indikator

- 3.5.1 Peserta didik mampu menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks
- 4.5 Peserta didik mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

Petunjuk Penggunaan :

1. Isilah identitas diri pada tempat yang telah disediakan
2. Lakukan setiap langkah kerja yang ada pada LKPD dengan hati-hati
3. Kerjakan dengan penuh tanggung jawab dan disiplin
4. Jika ada yang belum dipahami silahkan bertanya kepada guru
5. Jika telah selesai mengerjakan, silahkan kumpulkan LKPD kepada guru



Tranformasi Geometri

1. Translasi

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

Titik A (x,y) ditranslasikan oleh $T\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis

$$A(x,y) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)} A'(x', y')$$

Bentuk persamaan matriks translasi : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2. Refleksi

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin.

Jenis-jenis refleksi :

Refleksi	Titik Bayangan	Persamaan Matriks Transformasi
Sumbu x	$A'(x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Sumbu y	$A'(-x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Titik Asal O (0,0)	$A'(-x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = x$	$A'(y, x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = -x$	$A'(-y, -x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $x = h$	$A'(2h - x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$
Garis $y = k$	$A'(x, 2k - y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$

3. Rotasi

Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titiktitik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.

Jenis-jenis rotasi berdasarkan titik pusat :

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
-------------	--------------------------------

(0,0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4. Dilatasi

Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi.

Jenis-jenis dilatasi berdasarkan titik pusat :

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
(0,0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

5. Luas Bangun Hasil Transformasi

Transformasi yang biasanya dapat mengubah luas suatu bangun adalah yang berbentuk matrik tertentu. Translasi, refleksi dan dilatasi tidak mengubah luas suatu bangun.

Luas bangun hasil transformasi matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah :

$$L' = L \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Keterangan : L adalah luas awal sebuah bangun.

Untuk sebuah segitiga yang memiliki 3 titik maksimal ABC , maka untuk mencari luasnya digunakan rumus berikut:

$$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} [(a_1 b_2 + b_1 c_2 + c_2 a_2) - (b_1 a_2 + c_1 b_2 + a_1 c_2)]$$

6. Komposisi Dua Transformasi

a. Komposisi Transformasi Dengan Matriks

Menentukan bayangan :

$$\text{Bayangan} = (M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \times \text{awal}$$

Titik pusat (0,0)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Titik pusat (a, b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1) \times \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \times \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

b. Komposisi Translasi

Cara pengerjaan komposisi translasi yaitu langsung dengan menjumlahkannya saja dengan bangun awalnya. Berikut cara mencari bayangannya:

$$\text{Bayangan} = T_3 \circ T_2 \circ T_1 + \text{awal}$$

Penulisan secara matriknya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_3 \circ T_2 \circ T_1 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_3 \circ M_2 \circ M_1 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 + a_2 + a_1 \\ b_3 + b_2 + b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c. Komposisi Dilatasi

Menentukan bayangannya :

Jika semua jenis translasinya memiliki titik pusat atau titik acuan yang sama, maka kita bisa mengalikan semua matriks dilatasinya tanpa harus mengerjakan secara satu persatu dengan konsep komposisi matriks pada umumnya yaitu:

$$\text{Bayangan} = (M_3 \circ M_2 \circ M_1) \times \text{awal}$$

- Titik pusat $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (M_3 \circ M_2 \circ M_1) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Titik pusat (a,b)

- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1) \times \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (M_3 \circ M_2 \circ M_1) \times \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Catatan: Jika dilatasi dengan masing masing titik pusatnya berbeda, maka kita harus mengerjakannya satu persatu.

A. Pilihan Ganda

Petunjuk : Jawablah soal-soal berikut ini dengan benar. Pilihlah jawaban yang benar dengan mebklik pada pilihan A, B, C, D, dan E

1. Diketahui titik $P'(3, -13)$ adalah bayangan titik P oleh translasi $T = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Koordinat titik P adalah.....

A. $(13, -20)$	C. $(4, 20)$	E. $(-5, -20)$
B. $(13, -4)$	D. $(-5, -4)$	
2. Bayangan titik P (a, b) oleh rotasi terhadap titik pusat $(0, 0)$ sebesar -90° adalah $P'(-10, -2)$. Nilai dari $a + 2b = \dots\dots\dots$

A. -8	C. 8	E. 22
B. -18	D. 18	
3. Bayangan titik P $(5, 4)$ jika dilatasi terhadap pusat $(-2, -3)$ dengan factor skala -4 adalah.....

A. $-14, -7$	C. $-26, -1$	E. $-30, -31$
B. $-14, -1$	D. $-30, 7$	
4. Bayangan titik A dengan A $(-1, 4)$ jika direfleksikan terhadap garis $y = -x$ adalah.....

A. $A'(-4, 1)$	C. $A'(4, -1)$	E. $A'(4, 3)$
B. $A'(4, 1)$	D. $A'(-4, -1)$	
5. Garis $y = 2x - 3$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Persamaan bayangan garis tersebut adalah....

A. $y = 2x - 3$	C. $y = 2x + 4$	E. $y = -2x - 4$
B. $y = 2x - 4$	D. $y = -2x - 3$	

6. Bayangan titik P (2, -3) oleh rotasi R [O, 90°] adalah.....

- A. (-3, -2) C. (2, 3) E. (3, 2)
B. (-3, 2) D. (-2, 3)

7. Segitiga ABC dengan A (2, 1), B (6, 1), C (7, 4) ditransformasikan dengan matriks transformasi $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luas bangun hasil transformasi segitiga ABC adalah.....

- A. 56 satuan luas C. 28 satuan luas E. 18 satuan luas
B. 36 satuan luas D. 24 satuan luas

8. Jika A (2, 2) di refleksikan terhadap $y = x$ lalu di dilatasi dengan [O, 2], maka bayangannya adalah....

- A. (4, 2) C. (-2, 4) E. (4, 4)
B. (4, 1) D. (-3, 2)

9. Koordinat bayangan titik P (5, -4) oleh translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah $P'(x', y')$. Nilai $x' + y' = \dots$

- A. 3 C. 5 E. 2
B. 4 D. 6

10. Jika titik $G'(4, -1)$ adalah bayangan titik dari G (7, -5) oleh translasi T, maka nilai T adalah

- A. (2, 5) C. (1, 7) E. (3, 2)
B. (-3, 4) D. (4, 2)

B. Soal Uraian

Petunjuk : Carilah jawaban dan penyelesaian dari soal-soal berikut ini.

1. Tentukan peta titik A (3, 7) yang ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$!

Jawab :

2. Tentukan peta dari parabola $y = x^2 - 3x + 2$ jika ditranlasikan oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$!

Jawab :

3. Persamaan bayangan garis lurus $y = 3x + 2$ yang ditranlasi oleh $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan dilanjutkan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah

Jawab :

4. Peta dari titik A $(-1, 2)$ jika direfleksikan terhadap garis $y = -x$ adalah....

Jawab :

5. Tentukanlah peta dari titik A $(4, 2)$ akibat rotasi dengan pusat rotasi P $(1, 3)$ sejauh 45° !

Jawab :