

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK
MATERI TRIGONOMETRI
BAGIAN 3

Nama :

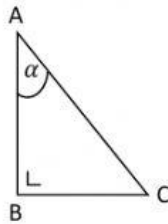
Kelas/No:

C. Sudut-Sudut Berelasi

1. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama

Relasi sudut α dan sudut $(90^\circ - \alpha)$ pada kuadran I

Perhatikan gambar berikut!



- Besar $\angle A$ + besar $\angle B$ + besar $\angle C$ adalah $\dots^\circ$.
- Jika $\angle B = \dots^\circ$ maka $\angle A + \angle C = 180^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$.
- Jika $\angle A = \alpha$ dan $\angle A + \angle C = \dots^\circ$ maka $\angle C = \dots^\circ - \alpha$

Maka

- $\sin \angle C = \sin (90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{AC} = \cos \alpha$
- $\cos \angle C = \cos (\dots^\circ - \alpha) = \frac{\dots}{\dots} = \dots \alpha$
- $\tan \angle C = \tan (\dots^\circ - \alpha) = \frac{\dots}{\dots} = \dots \alpha$

Kesimpulan :

- $\sin (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\cos (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\tan (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

Dengan mengikuti pola kesimpulan 1 – 3 dan atau dengan menyelidiki secara mandiri, maka dapat disimpulkan pula bahwa:

- $\sec (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\operatorname{cosec} (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\cotan (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

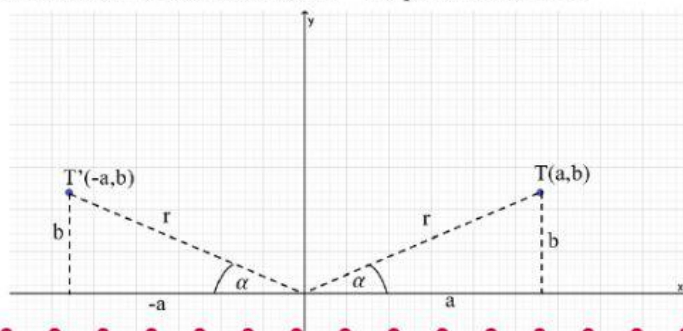
Contoh penggunaan sudut relasi $(90^\circ - \alpha)$ dalam perhitungan :

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

- $\sin 30^\circ = \sin (90^\circ - \dots^\circ) = \cos \dots^\circ = \dots$
 a. 0 b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e. 1
- Jika diketahui $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$, maka nilai $\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) = \dots$ $\theta = \dots$
 a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{4}{5}$ d. $\frac{5}{4}$ e. $\frac{5}{3}$

2. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Kedua

Relasi sudut α dan sudut $(180^\circ - \alpha)$ pada kuadran II



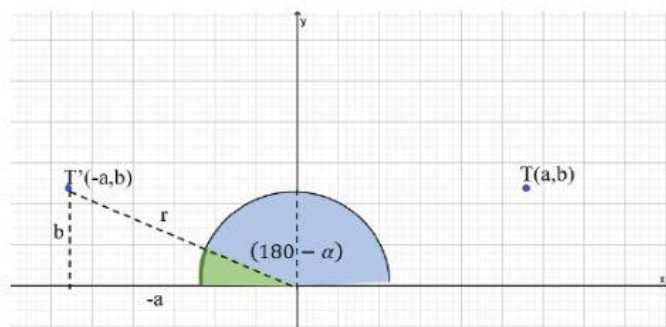
Pada Kuadran I,

$$\sin \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\tan \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cotan \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$



Besar sudut daerah yang berwarna hijau adalah α sesuai dengan gambar sebelumnya.

Relasi sudut $(180 - \alpha)$ adalah daerah yang diarsir berwarna hijau.

Dengan memperhatikan gambar dan koordinat titik T' , maka:

$$\sin(180 - \alpha) = \frac{b}{r} = \frac{b}{r} = \sin \alpha$$

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} = -\tan \alpha$$

Kesimpulan :

1. $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$

2. $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$

3. $\tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha$

Dengan mengikuti pola kesimpulan 1 – 3, maka dapat disimpulkan pula bahwa:

4. $\sec(180 - \alpha) = -\sec \alpha$

5. $\csc(180 - \alpha) = \csc \alpha$

6. $\cotan(180 - \alpha) = -\cotan \alpha$

Contoh penggunaan sudut relasi $(180 - \alpha)$ dalam perhitungan :

1. $\tan 120^\circ = \tan(180 - \dots)^\circ = -\tan \dots^\circ = \dots$

a. $\sqrt{3}$

b. 1

c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. $-\sqrt{3}$

e. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

2. Bentuk sederhana dari $\csc(90^\circ - \alpha) + \sec(180^\circ - \alpha) = \dots \alpha - \dots \alpha = \dots$

a. $-2 \sec \alpha$

b. $-2 \csc \alpha$

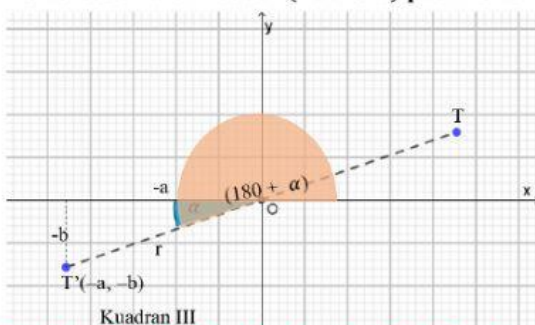
c. 0

d. $2 \sec \alpha$

e. $2 \csc \alpha$

3. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga

Relasi sudut α dan sudut $(180 + \alpha)$ pada kuadran III



Relasi sudut $(180 + \alpha)$ adalah daerah yang berwarna biru.

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan \alpha$$

Kesimpulan :

1. $\sin (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$
2. $\cos (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$
3. $\tan (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$

Contoh penggunaan sudut relasi $(180^\circ + \alpha)$ dalam perhitungan :

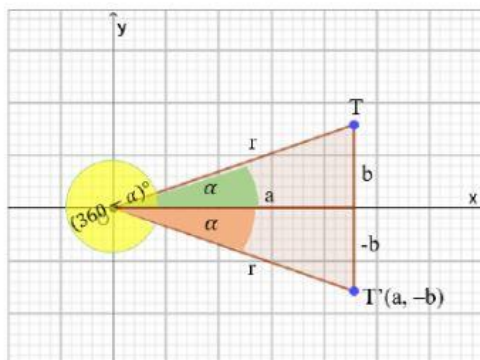
1. $\tan 210^\circ = \tan (180 + \dots)^\circ = \tan \dots^\circ = \dots$
a. -1 b. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d. $\sqrt{3}$ e. 1
2. Nilai dari $\sin 240^\circ + \cos 225^\circ$ adalah $\dots$.

Jawab :

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ + \cos 225^\circ &= \sin \dots^\circ + \cos \dots^\circ \\ &= \dots^\circ \dots^\circ \\ &= a. \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad b. \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad c. -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= a. \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad b. -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad c. -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

4. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Keempat

Relasi sudut α dan sudut $(360^\circ - \alpha)$ pada kuadran IV



Relasi sudut $(360^\circ - \alpha)$ adalah sudut yang berwarna orange.

Dengan memperhatikan segitiga dengan sudut orange beserta koordinat T' dan perbandingan trigonometri di kuadran I, maka:

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \frac{a}{r} = \dots \alpha$$

$$\tan (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = \dots \alpha$$

Kesimpulan :

1. $\sin (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
2. $\cos (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
3. $\tan (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

Contoh penggunaan sudut relasi ($360^\circ - \alpha$) dalam perhitungan :

Petunjuk : pilih jawaban dengan menyentuh pada salah satu kotak (bagian bawah) untuk kemudian digeser dan diletakkan pada kotak kosong (bagian atas) yang sesuai dengan relasi sudutnya

$\sin 330^\circ$	=	$\sin (360 - 30)^\circ$	=		=	
$\cos 315^\circ$	=		=		=	
$\tan 300^\circ$	=		=	$-\tan 60^\circ$	=	

$\cos 45^\circ$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan (360 - 60)^\circ$

$-\sin 30^\circ$

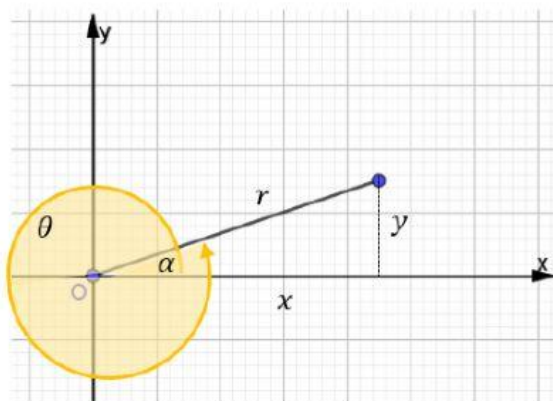
$-\sqrt{3}$

$\cos (360 - 45)^\circ$

$-\frac{1}{2}$

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut yang lebih dari 360°

Relasi sudut α dan sudut $(\alpha + n \times 360)$



Jika $\theta = k.360^\circ + \alpha$, dengan k merupakan bilangan bulat, maka

$$\sin (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\sec (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\cos (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\operatorname{cosec} (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\tan (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\cotan (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

Contoh penggunaan sudut relasi $(\alpha + n \times 360)$ dalam perhitungan :

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

Tentukan nilai

1. $\sec 930^\circ =$

2. $\tan 1.500^\circ =$

3. $\sin (-750^\circ) =$

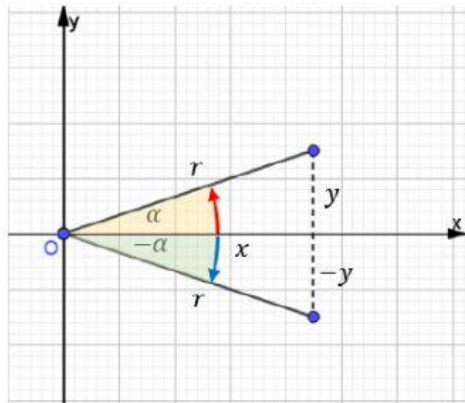


Jawab :

- $\sec 930^\circ = \sec (\dots \cdot 360^\circ + \dots^\circ) = \sec \dots^\circ = \sec (180 + \dots)^\circ = \dots = \dots$
 a. -2 b. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ d. $-\frac{1}{3}\sqrt{2}$ e. $-\frac{1}{2}$
- $\tan 1.500^\circ = \tan (\dots \cdot 360^\circ + \dots^\circ) = \tan \dots^\circ = \dots$
 a. -1 b. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d. $-\sqrt{3}$ e. $\sqrt{3}$

6. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Negatif

Relasi sudut α dan sudut $(-\alpha)$



Arah sudut $(-\alpha)$... dengan arah jarum jam.

tentukan nilai :

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \alpha$$

Kesimpulan :

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

Contoh penggunaan relasi sudut α dan sudut $(-\alpha)$ dalam perhitungan :

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

- $\cos(-120)^\circ = \dots^\circ = \cos(\dots^\circ) = \dots^\circ = \dots$
 a. $-\frac{1}{2}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e. $\frac{1}{2}$
- $\sin(-240)^\circ = \dots^\circ = -\sin(180 + \dots)^\circ = -(-\sin \dots^\circ) = \dots$
 a. $-\frac{1}{2}$ b. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e. $\frac{1}{2}$



D. Identitas Trigonometri

Bentuk-bentuk identitas trigonometri

1. Kebalikan (perkalian)

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sin \alpha = 1$$

$$\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Leftrightarrow \cotan \alpha \cdot \tan \alpha = 1$$

2. Pembagian (perbandingan)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

3. Kuadrat (Pythagoras)

Perhatikan kembali perbandingan untuk $\sin \alpha$ dan $\cos \alpha$ di atas.

didapat

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \sin \alpha \quad (\text{pers. 1})$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \cos \alpha \quad (\text{pers. 2})$$

Berdasarkan teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga,

Dan dengan mensubstitusikan pers. 1 dan 2 ke rumus Pythagoras, didapat

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (r \cdot \cos \alpha)^2 + (r \cdot \sin \alpha)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2 \alpha + r^2 \cdot \sin^2 \alpha &= r^2 \\ \Leftrightarrow r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= r^2 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \quad (\text{kedua ruas dibagi dengan } r^2) \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \quad (\text{penjumlahan bersifat komutatif}) \end{aligned}$$

Bentuk tersebut diatas merupakan persamaan trigonometri yang selalu bernilai benar untuk setiap α .

Jika kita membagi persamaan $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dengan $\sin^2 \alpha$, maka akan kita dapatkan bentuk identitas yang lain.

$$1 + \cotan^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

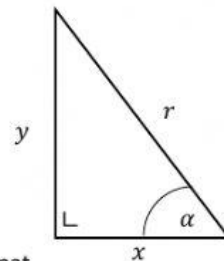
Jika kita membagi persamaan $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dengan $\cos^2 \alpha$, maka akan kita dapatkan bentuk identitas yang lain.

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

Contoh penggunaan identitas trigonometri

1. Buktikan bahwa :

a. $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$



b. $(\cos x + \sin x)^2 - 1 = 2 \sin x \cdot \cos x$

c. $\cos A \cotan A = \operatorname{cosec} A - \sin A$

Jawab :

1. a. Akan dibuktikan bahwa $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$

Ingat.

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) &= \sec^2 x \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan^2 x \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

- b. Akan dibuktikan bahwa $(\cos x + \sin x)^2 - 1 = 2 \sin x \cdot \cos x$

Ingat.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

maka

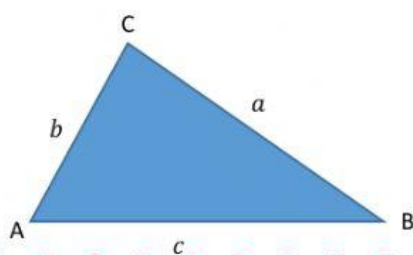
$$\begin{aligned} (\cos x + \sin x)^2 - 1 &= \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + 1 - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

- c. Akan dibuktikan bahwa $\cos A \cotan A = \operatorname{cosec} A - \sin A$

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \cotan A &= \cos A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \\ &= \frac{1}{\sin A} - \frac{\sin^2 A}{\sin A} \\ &= \operatorname{cosec} A - \sin A \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

E. Aturan Sinus dan Kosinus

Perhatikan gambar!



Sisi a terletak di depan $\angle A$.

Sisi b terletak di depan $\angle B$.

Sisi c terletak di depan $\angle C$.

Untuk sembarang segitiga ABC dengan panjang sisi-sisi a, b , dan c serta $\angle A, \angle B$, dan $\angle C$ berlaku:

1. Aturan Sinus

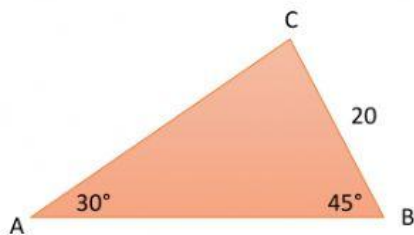
$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

Soal E1:

- Pada segitiga ABC diketahui $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ$, dan $AC = 20$ cm. Tentukan besar $\angle C$ dan panjang AC!
- Pada segitiga KLM diketahui $KL = 12\sqrt{3}$ cm, $LM = 12$ cm, dan $\angle K = 30^\circ$. Tentukan unsur sisi-sisi dan sudut-sudut yang belum diketahui pada segitiga KLM tersebut!

Jawab:

- Sketsa terlebih dahulu segitiga ABC beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC}$$

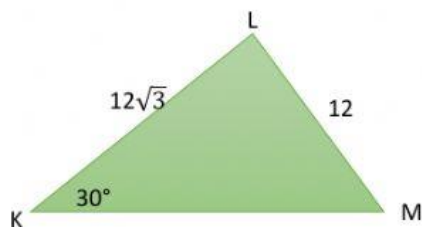
$$\frac{\sin 30^\circ}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{20}$$

$$BC = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$BC = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AC = \frac{20 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 40 \text{ cm}$$

- Sketsa terlebih dahulu segitiga KLM beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$\frac{\sin \angle K}{LM} = \frac{\sin \angle M}{KL}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{12} = \frac{\sin \angle M}{12\sqrt{3}}$$

$$\sin \angle M = \frac{12\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \angle M = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle M = 60^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\frac{\sin \angle K}{KM} = \frac{\sin \angle L}{KL}$$

$$KM = \frac{12 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 6 \text{ cm}$$

2. Aturan Kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

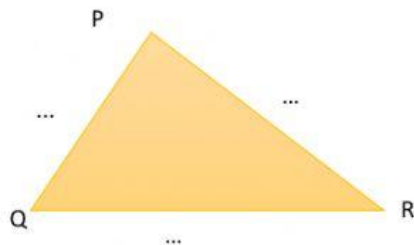
Soal E2:

- Pada segitiga PQR diketahui $PQ = 4$ cm, $PR = 5$ cm, dan $QR = 6$ cm. Tentukan nilai $\cos \angle Q$!

2. Sebuah pesawat pengintai terbang dengan arah jurusan tiga angka 030° dan menempuh jarak 40 km. Kemudian pilot membelokkan arah pesawat sehingga pesawat menuju arah 090° . Pada arah yang baru, pesawat menempuh jarak 60 km. Tentukan jarak pesawat tersebut dari posisi mula-mula!

Jawab:

1. Sketsa terlebih dahulu segitiga PQR beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$q^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos \angle Q$$

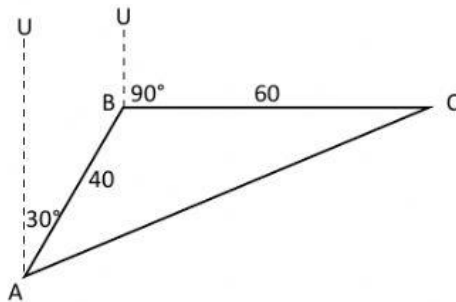
$$\angle Q = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2.p.r}$$

$$\angle Q = \frac{2^2 + 2^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\angle Q = \frac{+ -}{-}$$

$$\angle Q = -$$

2. Sketsa terlebih dahulu perjalanan kapal.



Jurusan tiga angka adalah besar sudut yang dimulai dari arah utara dan bergerak searah jarum jam.

$$\angle ABC = 90^\circ + 30^\circ = \quad^\circ$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = \quad^2 + \quad^2 - 2 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cos \quad^\circ$$

$$AC^2 = \quad + \quad - \quad (---)$$

$$AC^2 =$$

$$AC = \sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$$

3. Luas Segitiga

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$$

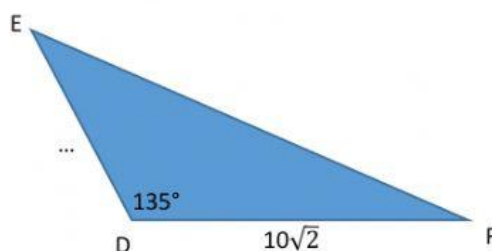
$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \angle B$$

Soal E3:

1. Pada segitiga DEF diketahui $DE = 12$ cm, $DF = 10\sqrt{2}$ cm, dan $\angle D = 135^\circ$. Tentukan Luas segitiga DEF!

Jawab:



$$\text{Luas } \triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \sin \angle$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \sin \quad^\circ$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \quad \cdot \quad$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \quad \text{cm}^2$$