

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: - Eugenia Tonidandel - Silvina Mozas - Vanina Iannizzotto
Cursos: 4º año	Tema: PARTE B: POLINOMIOS : FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE B)	Año: 2020

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE A)

PARTE B:

Factor Común – Factor Común En grupos
Trinomio Cuadrado Perfecto – Cuatrinomio Cubo Perfecto

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos

Para factorizar polinomios existen varios casos:

1) Factor común:

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$$a(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c \quad (\text{el factor } a \text{ se repite en ambos términos})$$

Se realizó propiedad distributiva

- Para extraer factor común, se debe proceder de manera inversa:

$$a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c)$$

Se extrajo factor común

Procedimiento:

1º Paso: Buscamos el **factor común** (será el MCD de los términos del polinomio: **El mayor número que divide a todos los coeficientes**)

2º Paso: Se expresa el **polinomio dado** como el producto del **factor común** extraído por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común

Por Ejemplo:

$$12x^3 - 8x^5 + 20x^2 = 4x^2 (3x - 2x^3 + 5)$$

- $4x^2$ es el mayor divisor por el que se puede dividir todos los términos
- $(3x - 2x^3 + 5)$ es el resultado de: $\frac{12x^3}{4x^2} - \frac{8x^5}{4x^2} + \frac{20}{4x^2}$

Ejercitación:

1) Extraer factor común de los siguientes polinomios y ubicar el resultado donde corresponda

a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^5 =$

b) $Q(x) = 24x^2 - 36x + 48 =$

c) $R(x) = -20x^7 - 25x^5 - 15x^8 =$

d) $S(x) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{10}x^3 - \frac{9}{4}x^2 =$

Respuestas:

$$\frac{3}{2}x^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{2} \right)$$

$$5x^5 \cdot (-4x^2 - 5 - 3x^3)$$

$$12 \cdot (2x^2 - 3x - 4)$$

$$x^3 \cdot (2x + 5 - 3x^2)$$

Normalización de Polinomios:

Para normalizar un polinomio, se debe **sacar factor común el coeficiente principal**. De este modo nos aseguramos que en la nueva expresión el polinomio resulta un polinomio **MÓNICO**, ya que su coeficiente principal será 1.

Por ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow P(x) = 2 \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2} \right) \Rightarrow \underbrace{P(x) = 2 \left(x^2 - \frac{1}{6} \right)}_{\text{Polinomio mónico normalizado}}$$

Polinomio mónico normalizado

II) Factor común por grupos: 🖐

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos. El número de términos del polinomio debe ser par.

Por Ejemplo: Por lo general se agrupan por mayores exponente, o bien, según los coeficientes

$$Q(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$$

$$(7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$$

$$x^4(7x - 5) + 2(7x - 5) =$$

$$(7x - 5) \cdot (x^4 + 2)$$

Agrupamos por mayores exponente

Sacamos factor común en cada grupo

Siempre deben quedar paréntesis iguales

Sacamos factor común el paréntesis igual

Procedimiento

1° Paso: Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se aplica factor común en cada uno de los grupos.

2° Paso: Debe quedar un paréntesis común.

3° Paso: Se extrae dicho paréntesis como factor común

Ejercitación:

1) Extraer factor común en grupos de los siguientes polinomios y unir con flechas según corresponda:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 =$$



☐ $\frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 1) \cdot (\frac{1}{4} + x)$

$$Q(x) = x^4 - x^3 + x - 1$$



☐ $(x + 2) \cdot (x^5 + x^3 + 2)$

$$R(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$$



☐ $(x^3 + 1) \cdot (x - 1)$

$$S(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2$$



☐ $(2x - 1) \cdot (2x^2 + 3)$

☐ Ninguna es correcta

III) Trinomio Cuadrado Perfecto:

Dado un trinomio, **será trinomio cuadrado perfecto** cuando pueda expresarse como un **cuadrado de binomio**. Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cuadrado de un binomio*

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Procedimiento:

1° Paso: Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante. Se calcula sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Se calcula el doble producto de sus bases; y se verifica que el doble producto figure en el trinomio dado.

3° Paso: Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; luego se factoriza como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

$$\underbrace{x^2 \pm 2ax + a^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del binomio}} = \boxed{(x \pm a)^2} \longrightarrow \text{Cuadrado de un binomio: Expresión factorizada del trinomio Cuadrado perfecto.}$$

Por ejemplo: $T(x) = x^2 + 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x + 3)^2$ o $T(x) = (-x - 3)^2$ Ambos términos tienen igual signo

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad \quad 3$
 $2 \cdot x \cdot 3$

Por ejemplo: $T(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x - 3)^2$ o $T(x) = (-x + 3)^2$ Ambos términos tienen distinto signos

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad \quad 3$
 $2 \cdot x \cdot 3$

OBSERVACIONES:

- Si el doble producto que figura en el "Trinomio dado" es positivo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán el mismo signo.
- Si el doble producto que figura en el "Trinomio dado" es negativo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán signos opuestos.

Ejercitación:

1) Expresar cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio y tildar aquellos resultados que sean correctos:

a) $P(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (-2x - 1)^2$ ☐

b) $S(x) = x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$ ☐

c) $T(x) = x^2 + \frac{9}{4} + 3x = (-x - \frac{3}{2})^2$ ☐

IV) Cuatrinomio Cubo Perfecto: 🖐

Dado un **cuatrinomio**, será **cuatrinomio cubo perfecto** cuando pueda expresarse como un **cubo de binomio**. Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cubo de un binomio*

Signos iguales en el cuatrinomio, implica signos iguales en el cubo de binomio

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\ -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 &= (-a - b)^3 \end{aligned}$$

Dos casos de signos diferentes en el cuatrinomio. Otro caso "NO ES CUATRINOMIO CUBO PERFECTO!"

$$\begin{aligned} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a - b)^3 \\ -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 &= (-a + b)^3 \end{aligned}$$

Procedimiento:

1° Paso: Se reconocen los cubos perfectos. Se calculan sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Se calcula:

- El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda
- El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda
- Se comparan estos cálculos con los del cuatrinomio dado.

3° Paso: Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego se factoriza como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.

$$\underbrace{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = (x + a)^3 \rightarrow \text{Cubo de un binomio: Expresi3n factorizada}$$

Cuatrinomio cubo perfecto: Es el desarrollo del cubo del binomio.

Por ejemplo 1: $M(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} \rightarrow M(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3$

Diagram illustrating the expansion of $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$ using the binomial theorem:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

The diagram shows the terms of the expansion and the corresponding binomial coefficients and powers of x and $-\frac{1}{3}$:

- x^3 (coefficient 1, power of x is 3)
- $-3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ (coefficient -3, power of x is 2, power of $-\frac{1}{3}$ is 1)
- $+3x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ (coefficient 3, power of x is 1, power of $-\frac{1}{3}$ is 2)
- $-\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ (coefficient -1, power of x is 0, power of $-\frac{1}{3}$ is 3)

Por ejemplo 2: $P(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

Diagram illustrating the expansion of $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$ into $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$. The terms of the binomial are mapped to the terms of the polynomial:

- x maps to x^3
- $\frac{1}{3}$ maps to $\frac{1}{27}$
- The binomial $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ maps to x^2 and $\frac{1}{3}x$

The resulting polynomial is $P(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$.

Por ejemplo 3: $P(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(-x + \frac{1}{3}\right)^3$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$

$-x \quad \quad \quad \frac{1}{3}$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$

$3 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad \quad \quad 3 \cdot (-x) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Por ejemplo 4: $P(x) = -x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(-x - \frac{1}{3}\right)^3$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$

$-x \quad \quad \quad -\frac{1}{3}$

$3 \cdot (-x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad 3 \cdot (-x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

Ejercitación :

Expresa cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio y marca V o F según corresponda:

a) $D(x) = x^3 + 125 + 15x^2 + 75x = (x + 5)^2$

V

F

b) $P(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (-x + 4)^3$

V

F

c) $T(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{3}{2}x = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3$

V

F

d) $R(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \left(-x + \frac{1}{2}\right)^3$

V

F