

|                                                                                                                      |                                                                                |                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  Departamento de Aplicación Docente | Matemática IV                                                                  | Profesoras: <ul style="list-style-type: none"> <li>Eugenia Tonidandel</li> <li>Silvina Mozas</li> <li>Vanina Iannizzotto</li> </ul> |
| Cursos: 4º año                                                                                                       | Tema:<br>PARTE B:<br><b>POLINOMIOS : FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE B)</b> | Año: 2020                                                                                                                           |

### FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE A)

#### PARTE B:

Factor Común – Factor Común En grupos  
Trinomio Cuadrado Perfecto – Cuatrinomio Cubo Perfecto

**Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos**

Para factorizar polinomios existen varios casos:

#### 1) Factor común:

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$$\underbrace{a(b \pm c)} = a \cdot b \pm a \cdot c \quad (\text{el factor } a \text{ se repite en ambos términos})$$

Se realizó propiedad distributiva

- Para extraer factor común, se debe proceder de manera inversa:

$$\underbrace{a \cdot b \pm a \cdot c} = a \cdot (b \pm c)$$

Se extrajo factor común

#### Procedimiento:

**1º Paso:** Buscamos el **factor común** (será el MCD de los términos del polinomio: **El mayor número que divide a todos los coeficientes**)

**2º Paso:** Se expresa el **polinomio dado** como el producto del **factor común** extraído por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común

#### Por Ejemplo:

$$12x^3 - 8x^5 + 20x^2 = 4x^2 (3x - 2x^3 + 5)$$

- $4x^2$  es el mayor divisor por el que se puede dividir todos los términos
- $(3x - 2x^3 + 5)$  es el resultado de:  $\frac{12x^3}{4x^2} - \frac{8x^5}{4x^2} + \frac{20x^2}{4x^2}$

### Ejercitación:

1) Extraer factor común de los siguientes polinomios y ubicar el resultado donde corresponda

a)  $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^5 =$

b)  $Q(x) = 24x^2 - 36x + 48 =$

c)  $R(x) = -20x^7 - 25x^5 - 15x^8 =$

d)  $S(x) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{10}x^3 - \frac{9}{4}x^2 =$

### Respuestas:

$$\frac{3}{2}x^2 \left( -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{2} \right)$$

$$5x^5 \cdot (-4x^2 - 5 - 3x^3)$$

$$12 \cdot (2x^2 - 3x - 4)$$

$$x^3 \cdot (2x + 5 - 3x^2)$$

### Normalización de Polinomios:

Para normalizar un polinomio, se debe **sacar factor común el coeficiente principal**. De este modo nos aseguramos que en la nueva expresión el polinomio resulta un polinomio **MÓNICO**, ya que su coeficiente principal será 1.

Por ejemplo:

$$R(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow R(x) = 2 \left( \frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2} \right) \Rightarrow \underbrace{R(x) = 2 \left( x^2 - \frac{1}{6} \right)}_{\text{Polinomio mónico normalizado}}$$

Polinomio mónico normalizado

### II) Factor común por grupos: ➡

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos. El número de términos del polinomio debe ser par.

**Por Ejemplo:** Por lo general se agrupan por mayores exponente, o bien, según los coeficientes

$$Q(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$$

$$(7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$$

$$x^4(7x - 5) + 2(7x - 5) =$$

$$(7x - 5) \cdot (x^4 + 2)$$

Agrupamos por mayores exponente

Sacamos factor común en cada grupo

**Siempre deben quedar paréntesis iguales**

Sacamos factor común el paréntesis igual

**Procedimiento**

**1° Paso:** Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se aplica factor común en cada uno de los grupos.

**2° Paso:** Debe quedar un paréntesis común.

**3° Paso:** Se extrae dicho paréntesis como factor común

**Ejercitación:**

1) Extraer factor común en grupos de los siguientes polinomios y unir con flechas según corresponda:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 =$$



☐  $\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{2} - x\right)$

$$Q(x) = x^4 - x^3 + x - 1$$



☐  $(x + 2) \cdot (x^5 + x^3 + 2)$

$$R(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$$



☐  $(x^3 + 1) \cdot (x - 1)$

$$S(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^1 - \frac{1}{2}x^2$$



☐  $(2x - 1) \cdot (2x^2 + 3)$

☐ Ninguna es correcta

### III) Trinomio Cuadrado Perfecto:

Dado un trinomio, **será trinomio cuadrado perfecto** cuando pueda expresarse como un **cuadrado de binomio**. Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cuadrado de un binomio*

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

#### Procedimiento:

**1° Paso:** Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante. Se calcula sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

**2° Paso:** Se calcula el doble producto de sus bases; y se verifica que el doble producto figure en el trinomio dado.

**3° Paso:** Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; luego se factoriza como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

$$\underbrace{x^2 \pm 2ax + a^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del binomio}} = \boxed{(x \pm a)^2} \longrightarrow \text{Cuadrado de un binomio: Expresión factorizada del trinomio Cuadrado perfecto.}$$

**Por ejemplo:**  $T(x) = x^2 + 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x + 3)^2$  o  $T(x) = (-x - 3)^2$  Ambos términos tienen igual signo

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $x \quad \quad 3$   
 $2 \cdot x \cdot 3$

**Por ejemplo:**  $T(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x - 3)^2$  o  $T(x) = (-x + 3)^2$  Ambos términos tienen distinto signos

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $x \quad \quad 3$   
 $2 \cdot x \cdot 3$

#### OBSERVACIONES:

- Si el doble producto que figura en el "*Trinomio dado*" es **positivo**, entonces las bases del Cuadrado del Binomio **tendrán el mismo signo**.
- Si el doble producto que figura en el "*Trinomio dado*" es **negativo**, entonces las bases del Cuadrado del Binomio **tendrán signos opuestos**.

### Ejercitación:

1) Expresar cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio y tildar aquellos resultados que sean correctos:

a)  $P(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (-2x - 1)^2$  ☐

b)  $S(x) = x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$  ☐

c)  $T(x) = x^2 + \frac{9}{4} + 3x = (-x - \frac{3}{2})^2$  ☐

### IV) Cuatrinomio Cubo Perfecto: 🖐

Dado un **cuatrinomio**, será **cuatrinomio cubo perfecto** cuando pueda expresarse como un **cubo de binomio**. Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cubo de un binomio*

Signos iguales en el cuatrinomio, implica signos iguales en el cubo de binomio

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\ -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 &= (-a - b)^3 \end{aligned}$$

Dos casos de signos diferentes en el cuatrinomio. Otro caso "NO ES CUATRINOMIO CUBO PERFECTO!"

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 = (-a + b)^3$$

#### **Procedimiento:**

**1° Paso:** Se reconocen los cubos perfectos. Se calculan sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

**2° Paso:** Se calcula:

- El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda
- El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda
- Se comparan estos cálculos con los del cuatrinomio dado.

**3° Paso:** Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego se factoriza como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.





Por ejemplo 1:

$x$

Por ejemplo 2:

Por ejemplo 3:

Por ejemplo 4:

$$3. (-x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad 3. (-x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

**Ejercitación :**

Expresa cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio y marca V o F según corresponda:

a)  $D(x) = x^3 + 125 + 15x^2 + 75x = (x + 5)^2$  ☐ V ☐ F

b)  $P(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (-x + 4)^3$  ☐ V ☐ F

c)  $T(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{3}{2}x = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3$  ☐ V ☐ F

d)  $R(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \left(-x + \frac{1}{2}\right)^3$  ☐ V ☐ F

**V) Diferencia de Cuadrados:**

Se basa en la siguiente fórmula:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

**Procedimiento:**

**1° Paso:** Se identifica la resta de dos cuadrados (debe haber un solo signo negativo). Los cuadrados deben ser perfectos.

**2° Paso:** Se calculan las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

**3° Paso:** Se transforma la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formados por dichas bases.

**Por ejemplo:**  $P(x) = x^2 - 25$   $P(x) = (x + 5)(x - 5)$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{25} = 5$$

### Ejercitación:

Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

a)  $x^2 - 4 =$

c)  $x^4 - 9 =$

b)  $64x^2 - 81 =$

d)  $x^2 - \frac{49}{121} =$

### Respuestas:

a)  $(x - 2) \cdot (x + 2)$       b)  $(8x - 9) \cdot (8x + 9)$

c)  $(x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3)$       d)  $(x - \frac{7}{11}) \cdot (x + \frac{7}{11})$

### VI) Suma o Diferencia de Potencias de igual exponente:

Son polinomios de la forma:  $x^n + a^n$  o  $x^n - a^n$

Estos polinomios se factorizan usando la suma o diferencia de las bases según sean.

Para un polinomio de la forma  $P(x) = x^n \pm a^n$  existen cuatro posibilidades:

$P(x) = x^n \pm a^n$  (n es par)

$P(x) = x^n \pm a^n$  (n es impar)

Todas las posibilidades se resumen en la siguiente tabla:

|             |               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^n + a^n$ | Si n es impar | $x^n + a^n$ es divisible por $x+a$ y por lo tanto<br>$x^n + a^n = (x+a)C(x)$ donde $C(x)$ es el cociente de la división<br>Ejemplos: $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$<br>$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4)$                                                                                                                                                      |
|             | Si n es par   | $x^n + a^n$ no es divisible por $x+a$ ni por $x-a$ pues el resto de la división es $R \neq 0$ en ambos casos<br><u>Excepción</u> : Si n no es potencia exacta de 2, se le puede considerar como múltiplo de un impar en cuyo caso se le puede factorizar como suma de potencias de grado impar<br>Ejemplo: $x^6 + a^6 = (\frac{x^2}{2})^3 + (a^2)^3 = (x^2 + a^2)(x^4 - x^2a^2 + a^4)$ |
| $x^n - a^n$ | Si n es impar | $x^n - a^n$ es divisible por $x-a$ y por lo tanto<br>$x^n - a^n = (x-a)C(x)$ donde $C(x)$ es el cociente de la división<br>Ejemplos: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$<br>$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$                                                                                                                                                      |
|             | Si n es par   | $x^n - a^n$ es divisible por $x+a$ y por $x-a$<br>$x^n - a^n = (x+a) \cdot C_1(x)$<br>$x^n - a^n = (x-a) \cdot C_2(x)$<br>Ejemplo: $x^4 - a^4 = (x-a) C_1(x) = (x+a) C_2(x)$<br>Observe que en este caso es más conveniente factorizar como diferencia de cuadrados<br>$x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = (x^2 + a^2)(x+a)(x-a)$                                                    |

Por ejemplo:  $P(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$



Se buscan las raíces de  $P(x): x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$

Por el teorema del resto:  $P(3) = 0 \rightarrow (x - 3)$  es divisor de  $P(x)$

Se aplica la Regla de Ruffini:

$$(x^3 - 27):(x - 3)$$

$$(x^3 + 2x^2 + 4x + 8):(x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$$

| $P(x) = x^n \pm a^n$ |             | Divisor /es                                              |
|----------------------|-------------|----------------------------------------------------------|
| $n$ impar            | $x^n + a^n$ | $(x + a)$                                                |
|                      | $x^n - a^n$ | $(x - a)$                                                |
| $n$ par              | $x^n - a^n$ | $(x + a) \cdot (x - a)$ (se usa diferencia de cuadrados) |
|                      | $x^n + a^n$ | se divide por $(x - a)$ y por                            |

**1)** Factorizar los siguientes polinomios a través de la suma y resta de potencias de igual exponente, y arrastra la respuesta correcta:

a)  $P(x) = x^7 + 1$

c)  $T(x) = x^3 - 64$

b)  $(x) = x^5 - \frac{1}{32}$

d)  $R(x) = x^3 + \frac{1}{125}$

**Respuestas:**

a)  $(x + 1) \cdot (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

b)  $(x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 16)$

b)  $(x - \frac{1}{5}) \cdot (x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16})$

c)  $(x + \frac{1}{5}) \cdot (1x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{125})$